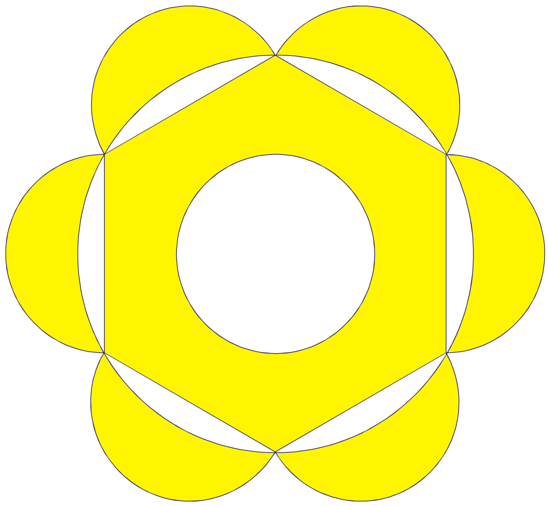
MSG (Zirkel 12) – Hausaufgaben

1. Es sei k eine positive ganze Zahl. Eine natürliche Zahl heiße *k-typisch*, wenn jeder ihrer Teiler bei Division durch k den Rest 1 lässt. Man beweise:
   a) Wenn die Anzahl der Teiler einer positiven ganzen Zahl n (einschließlich 1 und n) k-typisch ist, dann ist n die k-te Potenz einer ganzen Zahl.
   b) Die Umkehrung der Aussage a) ist falsch, wenn k größer als 2 ist.

2. Zeichnet man über den Seiten eines regelmäßigen Sechsecks nach außen Halbkreise, so liefert der Umkreis des Sechsecks sechs Sicheln.

   Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieser sechs Sicheln genau so groß ist wie der des im Innern liegenden Kreises, dessen Durchmesser so lang ist wie jede Seite des regelmäßigen Sechsecks.

   Wie groß ist der Umfang der Sicheln?



3. Let $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ be a permutation of the set $\mathbf{N}$ of all positive integers.
   (i) Show that there is an arithmetic progression of positive integers a, $a + d$, $a + 2d$, where $d > 0$, such that $f(a) < f(a + d) < f(a + 2d)$.
   (ii) Must there be an arithmetic progression $a, a + d, \ldots, a + 2003d$, where $d > 0$, such that $f(a) < f(a + d) < f(a + 2d) < \ldots < f(a + 2003d)$?