MSG (Zirkel 12) – Hausaufgaben

1. Von einer Folge (a_0, a_1, a_2, ...) reeller Zahlen sei bekannt:

   $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ für alle natürlichen Zahlen n.

   Man beweise, dass nur eine einzige Folge mit diesen Eigenschaften existiert, und gebe eine explizite Formel für a_n an.

2. Sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r und seien k_1 und k_2 zwei Kreise mit den Mittelpunkten O_1 und O_2 sowie den Radien r_1 und r_2, sodass k_1 den Kreis k von Innen im Punkt A_1, k_2 den Kreis k von Innen im Punkt A_2 und die Kreise k_1 und k_2 sich von Außen im Punkt A berühren.

   Zeigen Sie, dass die Geraden OA, O_1A_2 und O_2A_1 durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

3. (a) Given that $(x-y)(y-z)(z+x) = -90$ and $(x-y)(y+z)(z-x) = 42$ show that

   $z(x-y)^2 = 24$.

   (b) Given that x, y and z are positive integers, solve the system of simultaneous equations:

   $(x-y)(y-z)(z+x) = -90$

   $(x-y)(y+z)(z-x) = 42$

   $(x+y)(y-z)(z-x) = -60$.