

MSG (Zirkel 12) – Hausaufgaben

1. Man beweise, dass es unendlich viele Paare (x, y) verschiedener positiver rationaler Zahlen gibt, für die sowohl $\sqrt{x^2 + y^3}$ als auch $\sqrt{x^3 + y^2}$ rational ist.
2. Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen. Seien S_1 und S_2 zwei Kreise, sodass der Kreis S_1 die Gerade AB in B berührt, der Kreis S_2 die Gerade AC in C berührt und die Kreise S_1 und S_2 einander in D berühren. Zeigen Sie, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle BCD$ auf dem Umkreis von $\triangle ABC$ liegt.
3. $\triangle ABC$ is an acute-angled triangle, the bisector of angle A meets the circumcircle of $\triangle ABC$ in A_1 . Points B_1 and C_1 are defined similarly. Let AA_1 meet the line that bisects the two external angles at B and C , at A_0 . Points B_0 and C_0 are defined similarly. Prove that the area of the triangle $\triangle A_0B_0C_0$ is twice the area of the hexagon $AC_1BA_1CB_1$ and at least four times the area of the triangle $\triangle ABC$.