

**Errata and more:**



# **Mengen Relationen Funktionen**

**Ingmar Lehmann  
& Wolfgang Schulz**

Wiesbaden,  
Springer Spektrum,

2016, 207 S.

ISBN  
978-3-658-14398-5

# Inhalt

## 1 Mengen

### 1.1 Der Begriff der Menge

### 1.2 Das Prinzip der Mengenbildung

### 1.3 Zum Stufenaufbau der Mengenlehre

### 1.4 Das Prinzip der Mengengleichheit

### 1.5 Endliche und unendliche Mengen

### 1.6 Logische und mengentheoretische Zeichen

### 1.7 Mengenalgebra

#### 1.7.1 Inklusion (Teilmengenbeziehung)

#### 1.7.2 Eigenschaften der Inklusion

#### 1.7.3 Durchschnitt und Vereinigung

#### 1.7.4 Symmetrische Differenz, Differenz und Komplement

#### 1.7.5 Geordnetes Paar und kartesisches Produkt

#### 1.7.6 Weitere Eigenschaften der Inklusion

#### 1.7.7 Venn-Diagramme

#### 1.7.8 Eigenschaften der Mengenoperationen

#### 1.7.9 Duale Eigenschaften in der Mengenalgebra

#### 1.7.10 Durchschnitt und Vereinigung von Mengensystemen

### 1.8 Zahlbereiche

#### 1.8.1 Natürliche Zahlen

#### 1.8.2 Gebrochene Zahlen

#### 1.8.3 Rationale Zahlen

#### 1.8.4 Ganze Zahlen

#### 1.8.5 Reelle Zahlen

#### 1.8.6 Komplexe Zahlen

#### 1.8.7 Maschinenzahlen

## 2 Relationen

### 2.1 Der Begriff der $n$ -stelligen Relation

### 2.2 Zweistellige Relationen in einer Menge

#### 2.2.1 Verknüpfungen zweistelliger Relationen

#### 2.2.2 Relationsgraphen und Pfeildiagramme

#### 2.2.3 Eigenschaften zweistelliger Relationen

#### 2.2.4 Abhängigkeiten zwischen Eigenschaften zweistelliger Relationen

### 2.3 Spezielle Relationen

#### 2.3.1 Äquivalenzrelationen

#### 2.3.2 Ordnungsrelationen

#### 2.3.3 Teilbarkeit und $\leq$ -Relation

- 3 Funktionen**
- 3.1 Der Begriff der Funktion**
- 3.2 Funktionen als spezielle Relationen**
- 3.3 Ausblick auf Funktionen, die mehrstellig oder zweiwertig sind**
- 3.4 Binäre Operationen**
  - 3.4.1 Operationstabellen und Cayley-Diagramme
  - 3.4.2 Gruppenoperationen
  - 3.4.3 Rechenoperationen
  - 3.4.4 Mittelwerte
- 3.5 Kapriolen der Null**
  - 3.5.1 0 durch 0 (Division)
  - 3.5.2 0 teilt 0 (Teilbarkeit)
  - 3.5.3 0 hoch 0 (Potenzieren)
- 3.6 Nullstellen von Funktionen**
  - 3.6.1 Graphisches Lösen von Gleichungen
  - 3.6.2 Regula Falsi
- 3.7 Monotone Funktionen**
- 3.8 Eineindeutige Funktionen**
- 3.9 Gerade und ungerade Funktionen**
- 3.10 Periodische Funktionen**
- 3.11 Beschränkte Funktionen, Maximum und Minimum**
- 3.12 Potenzfunktionen**
- 3.13 Ganzrationale Funktionen**
- 3.14 Rationale Funktionen**
- 3.15 Exponential- und Logarithmusfunktionen**
- 3.16 Winkelfunktionen oder Trigonometrische Funktionen**
- 3.17 Funktionale Charakterisierungen einiger Funktionen**
  - 3.17.1 Eine funktionale Charakterisierung der direkten Proportionalitäten
  - 3.17.2 Eine funktionale Charakterisierung der Exponentialfunktionen
  - 3.17.3 Eine funktionale Charakterisierung der Logarithmusfunktionen
  - 3.17.4 Eine funktionale Charakterisierung der Potenzfunktionen
  - 3.17.5 Eine funktionale Charakterisierung der Sinusfunktion
- 3.18 Operationen mit Funktionen**
- 3.19 Ausblick auf Funktionen als Abbildungen**
- 3.20 Ausblick auf (einstellige) komplexe Funktionen**

**Anhang A: Funktionen im Überblick**

**Anhang B: Gleichungen und Ungleichungen**

**Lösungen**

**Literatur**

**Namen- und Sachverzeichnis**

## Vorwort zur 4., überarbeiteten und erweiterten Auflage

Wir freuen uns, dass das vorliegende Buch als 4. Auflage im Springer Spektrum Verlag erscheint. Die bisherigen drei Auflagen erschienen innerhalb der Reihe „mathematik-abc für das Lehramt“ im Teubner Verlag – herausgegeben von Prof. Dr. Stefan Deschauer, Prof. Dr. Klaus Menzel und Prof. Dr. Kurt Peter Müller, denen wir für Anregungen zum Inhalt und der Verbesserung der Lesbarkeit verpflichtet sind. Unser besonderer Dank gilt dabei Herrn Deschauer, der das damalige Manuskript sorgfältig durchgesehen hatte, und Herrn Jürgen Weiß vom Teubner Verlag, der die Entstehung des Buches unterstützte.

Es ist eine elementar gehaltene und um anschauliche Darstellung bemühte Einführung wichtiger Grundbegriffe der Mathematik. Dabei haben wir im Interesse von Lesbarkeit und Schulnähe nicht immer Vollständigkeit der Darlegung angestrebt. Das Buch „Mengen – Relationen – Funktionen“ wendet sich vorrangig sowohl an künftige als auch an bereits unterrichtende Lehrerinnen und Lehrer für Mathematik.

*Mengen*, *Relationen* und *Funktionen* sind als zentrale Begriffe der Mathematik auch fester Bestandteil des Mathematikunterrichts aller Schulformen. Viele mathematische Zusammenhänge lassen sich mit Hilfe des Mengenbegriffs anschaulich und einfach darstellen. Die wichtigsten hierfür erforderlichen Begriffe und Werkzeuge werden im Kapitel 1 „Mengen“ bereitgestellt. Den Schwerpunkt im Kapitel 2 „Relationen“ bilden Eigenschaften zweistelliger Relationen, wobei die Äquivalenz- und die Ordnungsrelationen, mit denen sich Mengen strukturieren lassen, besonders betont werden. Im Kapitel 3 „Funktionen“ werden vorzugsweise solche grundlegenden Begriffe behandelt, die einerseits im Mathematikunterricht bereits im Vorfeld der Analysis eine Rolle spielen, andererseits der Vorbereitung auf die Differential- und Integralrechnung dienen. Darüber hinaus berücksichtigen wir, dass Funktionen (als Abbildungen) auch Wurzeln in der Algebra und der Geometrie haben. Während Kapitel 1 grundlegend für die folgenden Kapitel 2 und 3 ist, können die Kapitel 2 und 3 auch unabhängig voneinander gelesen werden.

In der vorliegenden Auflage befinden sich einige neue Abschnitte. Im Kapitel 1.8 wird eine knappe Übersicht über die Zahlbereiche von den natürlichen Zahlen bis zu den komplexen Zahlen gegeben. Im Kapitel 3.4.3 befindet sich eine Zusammenschau der elementaren Rechenoperationen unter dem Gesichtspunkt der Rechengesetze. Das Kapitel 3.4.4 konzentriert sich auf die Mittelwerte als zweistellige Operationen und ihre geometrische Veranschaulichung. Im Kapitel 3.15 stehen die reellen Exponential- und Logarithmusfunktionen im Mittelpunkt. Das Kapitel 3.20 bietet einen Ausblick auf einstellige komplexe Funktionen. Im Anhang A findet man eine Zusammenfassung der im Band betrachteten Funktionen. Neu aufgenommen wurde ein Anhang zum Arbeiten mit Gleichungen und Ungleichungen. Bei der Überarbeitung des Buches wurden die komplexen Zahlen stärker berücksichtigt und einige Druckfehler beseitigt.

Somit stellt der Inhalt des Buches einerseits eine Vorbereitung auf weitere mathematische Studien speziell in der Algebra, Geometrie und in der Analysis dar, andererseits findet man hier einen Überblick über den mathematischen Hintergrund für große Teile des Mathematikunterrichts. Bei der Stoffauswahl haben wir uns auf jene Teile und Werkzeuge beschränkt, die nach unserer Meinung immer (wieder) benötigt werden und für viele Teilgebiete der Mathematik, vor allem aber für Mathematiklehrerinnen und -lehrer, ein ganz selbstverständliches Handwerkszeug sind.

Die von uns verwendeten Zeichen und Bezeichnungen sind in der mathematischen Literatur weitgehend üblich. Gegebenenfalls weisen wir an Ort und Stelle auf abweichende Bezeichnungen hin. Neben der verbalen Formulierung von Definitionen und Sätzen werden von uns auch bestimmte Abkürzungstechniken benutzt. Ihr Vorteil besteht darin, dass durch die verwendeten Zeichen die logische Struktur einer Definition oder eines Satzes deutlicher wird. Für die Schule

hingegen ist eine solche stark formalisierende Schreibweise *kaum* zu empfehlen. Eine (korrekte) verbale Formulierung ist genauso exakt wie die mit Hilfe der logischen Zeichen. Sie ist darüber hinaus oft leichter verständlich und trägt so wesentlich zur sprachlich-logischen Schulung bei. Wir benutzen beide Schreibweisen, zum Teil parallel, oder auch nur eine von beiden. Die wichtigsten logischen Begriffe und Methoden wurden bewusst nicht in einem eigenständigen Kapitel vorangestellt. Sie werden vielmehr an geeigneter Stelle eingeführt und benutzt. Das entspricht im Wesentlichen dem in Schule und Hochschule praktizierten Vorgehen.

Die gewählte Form der Darstellung unterscheidet sich von anderen zu diesem Thema vorliegenden Büchern durch das weitgehend realisierte Zwei-Seiten-Konzept. Die Theorie wird fortlaufend auf den linken Seiten dargestellt. Auf den gegenüberliegenden rechten Seiten finden sich jeweils zugehörige Beispiele, Übungen und stoffliche Ergänzungen. Das Zwei-Seiten-Konzept hat den Vorteil, dass Bezüge zwischen Theorie und zugehörigen Beispielen unmittelbar deutlich werden.

Der Text ist in den Kapiteln auf folgende Weise strukturiert: Es gibt *Definitionen*, *Sätze*, *Beispiele* und *Übungen*, die – wie auch die Bilder – kapitelweise nummeriert sind. Wichtige Definitionen und Sätze sind darüber hinaus durch Rahmung optisch hervorgehoben. Begriffe werden zusätzlich durch Fett- oder Kursivdruck markiert. Weitere Hervorhebungen oder sonstige Ergänzungen sind durch • und bei Folgerungen durch ➤ gekennzeichnet. Das Ende eines Beweises wird mit ■ angezeigt.

Die *Übungen* fordern zu eigener mathematischer Tätigkeit auf und bieten zugleich die Möglichkeit zu überprüfen, ob und wie weit die eingeführten Begriffe und Sätze verstanden worden sind. Am Ende des Buches werden *Lösungen* bzw. *Lösungshinweise* gegeben. Wir empfehlen der Versuchung zu widerstehen, zu früh im Lösungsteil nachzuschlagen. Dieser sollte ausschließlich dazu dienen, die eigenen Ergebnisse mit denen des Buches zu vergleichen. Der Reiz, eine eigene Lösung zu finden und sich damit zu bestätigen, ist eine der entscheidenden Motivationen auf dem Gebiet der Mathematik.

Herrn Professor Dr. Jörn Quistorff danken wir für eine Vereinfachung zum Bild 2.6. Schließlich möchten wir Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch für ihre unterstützende Betreuung von Seiten des Springer Spektrum Verlages herzlich danken.

Für Hinweise und Anregungen sind wir unseren Lesern dankbar.

Berlin, Mai 2016

Ingmar Lehmann

Wolfgang Schulz

[ilehmann@math.hu-berlin.de](mailto:ilehmann@math.hu-berlin.de)

[wschulz@math.hu-berlin.de](mailto:wschulz@math.hu-berlin.de)

# Mengen – Relationen – Funktionen

Ingmar Lehmann & Wolfgang Schulz

Wiesbaden, Springer Spektrum, 2016

## Errata

Seite 43, Übung 1.53 h): Ersetze “ $\complement A \Delta \complement A = A \Delta B$ .” durch “ $\complement A \Delta \complement A = \emptyset$ .”

Seite 99, Beispiel 3.8: Ersetze den ersten Satz durch “Wir betrachten die Funktion  $f$  mit  $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$  und  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ .”

Seite 100: Ersetze in Definition 3.6  $\bigwedge_{a,b,x \in G}$  durch  $\bigwedge_{a,x,y \in G}$

Seite 172, Ü 1.53: h) Ersetze “Tabelle 0 1 1 0” durch “Tabelle 0 0”

Seite 175, Ü 2.10: Ersetze 9. Zeile v. o. durch

Menge $M$	<b>Q</b>	<b>R</b>	<b>R</b>	$\wp(M)$	<b>N</b>	<b>N</b>	<b>Q</b>	<b>R*</b>	<b>R</b>	<b>N×N</b>	$F$	$W$	$P$
Relation $R$	$R_{14}$	$R_{15}$	$R_{16}$	$R_{17}$	$R_{18}$	$R_{19}$	$R_{20}$	$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{23}$	$R_{24}$	$R_{25}$	$R_{26}$
Zeichen für $R$	$>$	$\geq$	$\neq$	$\subset$	$VF$	$VG$			$\approx$	$\Rightarrow$	$\sim$	$KW$	$Sp_{\mathbb{R}}$
transitiv	1	1	0	1	1	0	1	1	<b>1</b>	1	1	0	0

Seite 181, Ü 3.17: Ersetze 1. und 3. Zeile v. u. durch

Bildungsvorschrift	$x \circ y :=$	<b>G</b>	UKB	KB	NE	IE	AE	A	K	I	U	BS
Subtraktion	$x - y$	<b>R</b>	×	×	–	–	–	–	–	–	×	×
Division	$x : y$	<b>R*</b>	×	×	–	–	–	–	–	–	×	×

Seite 185, Ü 3.33: h) Ersetze “ $\frac{d}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ ” durch “ $\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ ”

Seite 191, Ü 3.59: e) 15. Zeile: „ $f$  hat keine Nullstelle ...“

$$19. \text{ Zeile: Dann gilt } 0 < \frac{1}{\sqrt[5]{x_2^6}} < \frac{1}{\sqrt[5]{x_1^6}}.$$

---

We appreciate any comments about the book as well as any typographical errors that have not yet been detected so that they can be incorporated in future printings of the book.

---

Ingmar Lehmann  
[ilehmann@math.hu-berlin.de](mailto:ilehmann@math.hu-berlin.de)

Wolfgang Schulz  
[wschulz@math.hu-berlin.de](mailto:wschulz@math.hu-berlin.de)