Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 02.07.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsbereich mit Einselement 1. Wir definieren den *Polynomring* $(R[X], +, \cdot)$ *in der Variablen* X *mit Koeffizienten aus* R als die Menge

$$R[X] := \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j \,\middle|\, a_j \in R,\, a_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N} \right\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) + \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j \cdot X^j\right) := \sum_{j\in\mathbb{N}} (a_j + b_j) \cdot X^j,$$

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) \cdot \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j \cdot X^j\right) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{N}\\ k+\ell=j}} a_k \cdot b_\ell\right) \cdot X^j.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(R[X], +, \cdot)$ ein Integritätsbereich mit Einselement ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die multiplikativ invertierbaren Elemente von $R[X]$ mit den multiplikativ invertierbaren Elementen von R übereinstimmen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ der Polynomring in der Variablen X mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ (siehe Aufgabe 1). Für $p(X) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j \in \mathbb{Q}[X]$ definieren wir *den Grad von* $p(X)$ durch

$$\operatorname{grad}(p) := \max\{j \in \mathbb{N} \mid a_j \neq 0\},$$

sofern $p \neq 0$ gilt. Für $p = 0$ setzen wir $\operatorname{grad}(p) := -\infty$.

(a) Zeigen Sie, dass der Euklidische Algorithmus auch in $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ durchgeführt werden kann. Beweisen Sie dazu: Sind $a(X), b(X)$ zwei Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ mit $b \neq 0$, dann gibt es $q(X), r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $0 \leq \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(b)$ oder $r = 0$, so dass

$$a(X) = q(X) \cdot b(X) + r(X).$$

(b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $g(X)$ von $a(X) = X^4+2X^3+2X^2+2X+1$ und $b(X) = X^3+X^2-X-1$ und bestimmen Sie Polynome $c(X), d(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit
$$c(X) \cdot a(X) + d(X) \cdot b(X) = g(X).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1 und
$$R^\times := \{a \in R \,|\, \exists\, b \in R : a \cdot b = 1 = b \cdot a\} \subseteq R$$
die Menge aller Elemente in R, die in R multiplikativ invertierbar sind. Zeigen Sie: $(R^\times, \cdot)$ ist eine Gruppe. Man nennt diese die *Einheitengruppe von R*.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppen der Ringe $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$ für $n = 7, 9, 13, 21$. Welche dieser Gruppen sind zyklisch, welche sind zueinander isomorph?