HU Berlin Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 09.07.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in K. Zeigen Sie, dass dann entweder $\mathfrak{a} = (0)$ oder $\mathfrak{a} = (1)$ gelten muss.

(b) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Gibt es einen Ringhomomorphismus $f : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$, der nicht die Nullabbildung ist? Begründen Sie.

(c) Zeigen Sie, dass ein Ringhomomorphismus $f : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ entweder die Nullabbildung oder die Identität ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst: Ist f nicht die Nullabbildung, so muss $f(1) = 1$ gelten.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Dezimalbruchentwicklung der Zahlen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{28}$.

(b) Zeigen Sie: Aus einer rein periodischen Dezimalbruchentwicklung $0,\overline{q_{-1} \cdots q_{-p}}$ gewinnen wir den zugehörigen Bruch $\frac{a}{b}$ durch die Formel

$$\frac{a}{b} = \frac{\sum_{j=1}^{p} q_{-j} 10^{p-j}}{10^p - 1}$$

zurück.

(c) Bestimmen Sie eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit $(a, b) = 1$, die die Dezimalbruchentwicklung $0,3\overline{4\,5}$ besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ mit $(a, b) = 1$ genau dann abbricht, wenn b nur die Primteiler 2 und 5 besitzt.

(b) In einzelnen Kulturen werden Zahlen im Hexalsystem, also zur Basis 6, angegeben, da man so mit zwei Händen leicht die Zahlen von 0 bis 35 anzeigen kann (nämlich wie?). Analog zur Dezimaldarstellung ist die Hexaldarstellung einer rationalen Zahl durch

$$\pm q_\ell \ldots q_0, q_{-1} \ldots q_{-k} \ldots := \pm \sum_{j=-\ell}^{\infty} \frac{q_{-j}}{6^j} \quad (q_{-j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$$

gegeben. Äußern Sie eine Vermutung, wann genau eine rationale Zahl eine abbrechende Hexaldarstellung besitzt.