Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 07.05.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 2 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien $m, n, p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$. Zeigen Sie: Aus $m < n$ folgt $m \cdot p < n \cdot p$.

(b) Zeigen Sie, dass die Differenz $m - n$ zweier natürlicher Zahlen m, $n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ wohldefiniert ist, d.h. dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Gleichung $n + x = m$ erfüllt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $a_1, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen. Ferner sei bekannt, dass $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + 1$ durch 4 teilbar ist.

(a) Beweisen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen $a_1 + 1, \ldots, a_k + 1$ durch 4 teilbar ist.

(b) Nutzen Sie die Beweisidee von Euklid und (a), um zu zeigen, dass es sogar in der Teilmenge der natürlichen Zahlen

$$4 \cdot \mathbb{N} + 3 := \{3,\ 4 + 3,\ 8 + 3, \ldots,\ 4 \cdot n + 3, \ldots \mid n \in \mathbb{N}\}$$

unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Eine Primzahl der Form $p = 2^n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt *Mersennesche Primzahl.* Zeigen Sie: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch n eine Primzahl. Gilt auch die Umkehrung?

(b) Eine natürliche Zahl n heißt *vollkommen*, falls die Summe all ihrer Teiler $2n$ ergibt, d.h. falls

$$\sum_{d \mid n} d = 2n$$

gilt. Beweisen Sie: Wenn n von der Form $n = 2^m \cdot (2^{m+1} - 1)$ mit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, und $2^{m+1} - 1$ eine Primzahl ist, so ist n vollkommen.
Bemerkung: Tatsächlich sind alle geraden vollkommenen Zahlen von dieser Form.