HU Berlin Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 14.05.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 3 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass eine natürliche Zahl $a > 0$ nicht zwei Primfaktorzerlegungen besitzen kann, in denen unterschiedliche Primfaktoren vorkommen. Vervollständigen Sie den Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, indem Sie die folgende Aussage zeigen:
Eine natürliche Zahl $a > 0$ besitze die Primfaktorzerlegungen

$$a = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r},$$
$$a = p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{b_r}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und positiven natürlichen Zahlen $a_1, \ldots, a_r$, bzw. $b_1, \ldots, b_r$. Dann gilt $a_j = b_j$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Finden Sie händisch die Primfaktorzerlegungen der Zahlen $3\,570$, $135\,135$, 273^{273} und $2^{32} - 1$.

(b) Bestimmen Sie händisch die größten gemeinsamen Teiler $(777^{777}, 273^{273})$, $(2^{16} - 1, 3^{12} - 2^{12})$, $(10^6 - 1, 10^9 + 1)$ und $(3\,600, 3\,240, 1\,125)$.

(c) Bestimmen Sie händisch die kleinsten gemeinsamen Vielfachen $[777^{777}, 273^{273}]$, $[2^{16} - 1, 3^{12} - 2^{12}]$, $[10^6 - 1, 10^9 + 1]$ und $[3\,600, 3\,240, 1\,125]$.

(d) Finden Sie drei natürliche Zahlen a_1, a_2, a_3, die teilerfremd, aber nicht paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)

Es sei $n = g_\ell \cdot 10^\ell + \ldots + g_2 \cdot 10^2 + g_1 \cdot 10 + g_0$ $(0 \leq g_j \leq 9, g_\ell \neq 0;\ j = 0, \ldots, \ell)$ die Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl n. Dann heißt

$$Q(n) = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_\ell$$

Quersumme von n,

$$Q_a(n) = g_0 - g_1 + g_2 - g_3 + \ldots + (-1)^\ell g_\ell$$

alternierende Quersumme von n und

$$Q_{3a}(n) = (g_0 + g_1 \cdot 10 + g_2 \cdot 10^2) - (g_3 + g_4 \cdot 10 + g_5 \cdot 10^2) \pm \ldots$$

alternierende 3-*Block-Quersumme von n*. Zeigen Sie:

(a) n ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

(b) n ist genau dann durch 8 teilbar, wenn $g_2 \cdot 4 + g_1 \cdot 2 + g_0$ durch 8 teilbar ist.

(c) n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn $Q_a(n)$ durch 11 teilbar ist.

(d)* n ist genau dann durch 7 bzw. 13 teilbar, wenn $Q_{3a}(n)$ durch 7 bzw. 13 teilbar ist.