Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 23.05.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 4 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Führen Sie für die folgenden Paare natürlicher Zahlen geschickt Division mit Rest durch: 22 222 und 101, $3^{16} - 2^{16}$ und $4^4 + 9^4$, sowie $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ und $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

(b) Verwenden Sie Division mit Rest, um die Zahlen 120 bzw. 998 im Siebenersystem darzustellen, sie also in der Form

$$g_\ell \cdot 7^\ell + \ldots + g_2 \cdot 7^2 + g_1 \cdot 7 + g_0 \ \ (0 \leq g_j \leq 6,\, g_\ell \neq 0;\, j = 0, \ldots, \ell)$$

zu schreiben. Geben Sie weiter das Produkt $120 \cdot 998$ im Siebenersystem an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Halbgruppe oder ein Monoid bilden. Ist die Verknüpfung kommutativ?

(a) $M = 2\mathbb{N} + 1$ mit $m \circ n := 3(m + n) \quad (m, n \in 2\mathbb{N} + 1)$.

(b) $M = \mathbb{N}$ mit $m \circ n := \min\{m, n\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(c) $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{N})$ mit $(f_1 \circ f_2)(n) := f_1(f_2(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(f_1, f_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}))$.

Hier bezeichnet $\mathrm{Abb}(\mathbb{N})$ die Menge aller Abbildungen der natürlichen Zahlen in sich selbst.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{R}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ der ersten n natürlichen Zahlen. Auf der Menge $\mathcal{R}_n$ wurden in der Vorlesung die folgenden zwei Verknüpfungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n &\longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \oplus b := R_n(a + b); \\ \odot : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n &\longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \odot b := R_n(a \cdot b). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $R_n(c) \in \mathcal{R}_n$ den Rest der natürlichen Zahl c nach Division durch n.

Die Assoziativität der Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ wird in den Übungen gezeigt. Diese kann also im Folgenden vorausgesetzt werden.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Geben Sie die Gruppentafel für $(\mathcal{R}_6, \oplus)$ an.

(b) Es sei $n \in \{1, \ldots, 6\}$. Entscheiden Sie, wann $(\mathcal{R}_n \setminus \{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist und geben Sie gegebenenfalls die Gruppentafel an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Wir erinnern daran, dass die Menge aller Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene eine Gruppe bildet. Gegeben sei nun ein regelmäßiges n-Eck P_n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ in der euklidischen Ebene. Die Menge D_{2n} aller Kongruenzabbildungen, die P_n auf sich selbst überführen, ist ebenfalls eine Gruppe, die *n-te Diedergruppe* genannt wird.

(a) Beweisen Sie, dass die Gruppe D_{2n} mindestens eine Spiegelung s und eine Drehung d um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ enthält; geben Sie dazu die Spiegelachse von s und das Drehzentrum von d an. Verifizieren Sie für s und d die Relationen

$$s^2 = e \;, \qquad d^n = e \;, \qquad s \circ d \circ s = d^{-1}.$$

(b) Zeigen Sie geometrisch anschaulich, dass D_{2n} aus den n Drehungen $d^0, \ldots, d^{n-1}$ und n Spiegelungen $s_1, \ldots, s_n$ besteht.

(c) Zeigen Sie, dass jede der Spiegelungen $s_1, \ldots, s_n$ eindeutig als Produkt $s \circ d^m$ mit $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und s, d aus (a) darstellbar ist.