HU Berlin Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 11.06.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq H$ ein Normalteiler in H, so ist das Urbild $f^{-1}(N)$ von N unter f ein Normalteiler in G.

(b) Betrachten Sie die Untergruppe $U := \{d^0, d^2, s_2, s_4\} \leq D_8$, die die Identität, die Drehung um den Winkel π und die Spiegelungen s_2, s_4 an den beiden Seitenhalbierenden des Quadrats enthält. Stellen Sie die Gruppentafel von U auf. Verwenden Sie (a), um zu zeigen, dass U ein Normalteiler in D_8 ist, indem Sie einen geeigneten Gruppenhomomorphismus $f : D_8 \longrightarrow S_4$ angeben.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Untergruppe $N := \{0, 4\} \leq (\mathcal{R}_8, \oplus)$. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in $(\mathcal{R}_8, \oplus)$ ist und verifizieren Sie die Isomorphie $(\mathcal{R}_8/N, \oplus) \cong (\mathcal{R}_4, \oplus)$.

(b) Zeigen Sie allgemein: Es seien m, n, r natürliche Zahlen mit $r = m \cdot n$. Dann gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteq (\mathcal{R}_r, \oplus)$ mit $N \cong (\mathcal{R}_n, \oplus)$, und es gilt die Isomorphie $(\mathcal{R}_r/N, \oplus) \cong (\mathcal{R}_m, \oplus)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(G, \circ_G)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G. Für eine nicht-leere Menge X bzw. eine nicht-leere Teilmenge $Y \subseteq X$ betrachten wir $\mathrm{Abb}(X, G)$ bzw. $\mathrm{Abb}(Y, G)$, die Menge der Abbildungen von X bzw. Y nach G.

(a) Wir definieren eine Verknüpfung $\star$ auf $\mathrm{Abb}(X, G)$ gemäß

$$(f_1 \star f_2)(x) := f_1(x) \circ_G f_2(x) \qquad (x \in X; f_1, f_2 \in \mathrm{Abb}(X, G)).$$

Zeigen sie, dass $(\mathrm{Abb}(X, G), \star)$ eine Gruppe ist. Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Abb}(X, G)$ genau dann abelsch ist, wenn G abelsch ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$N := \{f \in \mathrm{Abb}(X, G) \mid f(y) = e_G \quad \forall\, y \in Y\}$$

ein Normalteiler in $\mathrm{Abb}(X, G)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(X, G)/N \cong \mathrm{Abb}(Y, G)$ gilt.