

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 18.06.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 8 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- (a) Es sei $(H, \circ)$ eine reguläre Halbgruppe und $h \in H$. Die Abbildung $f_h : H \rightarrow H$ sei gegeben durch $f_h(g) = g \circ h$ ($g \in H$). Untersuchen Sie, ob f_h immer injektiv bzw. surjektiv ist.
- (b) Beweisen Sie, dass die Halbgruppe $(\mathbb{N}, \circ)$ mit der Verknüpfung $m \circ n := \max(m, n)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) nicht regulär ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung f_h aus (a) für $(\mathbb{N}, \circ)$ aus (b) im Allgemeinen nicht injektiv ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir definieren auf der Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$, gegeben durch die in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzklassen $[a, b]$ mit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine Multiplikation durch

$$[a, b] \cdot [a', b'] := [aa' + bb', ab' + a'b] \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert und assoziativ ist und beweisen Sie eines der beiden Distributivgesetze.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die kommutative Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ regulär ist.
- (b) Wenden Sie die Konstruktion einer Gruppe $(G, \circ)$ aus einer kommutativen regulären Halbgruppe auf die Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ an. Welches ist die zugrunde liegende Äquivalenzrelation? Wie ist die zugrunde liegende Verknüpfung definiert? Mit welchem Zahlbereich können Sie die so konstruierte Gruppe $(G, \circ)$ identifizieren, d. h. zu welchem Zahlbereich ist $(G, \circ)$ isomorph?
- (c) Sind die Halbgruppen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ zueinander isomorph? Sind die aus $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ konstruierten Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(G, \circ)$ zueinander isomorph? Begründen Sie.