



Dichteste Kugelpackungen in höheren Dimensionen – Die Arbeiten von Maryna Viazovska

Jürg Kramer

Eingegangen: 28. Juni 2024 / Angenommen: 28. Juni 2024
© The Author(s) 2024

Zusammenfassung In diesem Beitrag werden die bahnbrechenden Ergebnisse von Maryna Viazovska zu Kugelpackungen in höheren Dimensionen vorgestellt.

Schlüsselwörter Kugelpackungen · Modulformen

1 Kugelpackungen

Mit diesem Beitrag sollen die bahnbrechenden Errungenschaften von Maryna Viazovska zu Kugelpackungen in höheren Dimensionen möglichst allgemein verständlich vorgestellt werden. Dabei stützen wir uns auch auf die empfehlenswerten Ausführungen [1, 2] von Henry Cohn.

Wir beginnen mit dem Begriff der Kugelpackung (siehe z. B. [5]). Eine *Kugelpackung* des 3-dimensionalen Raumes \mathbb{R}^3 ist eine Anordnung gleich großer Kugeln, die sich höchstens berühren (vgl. Abb. 1). Wir sprechen von einer *dichtesten Kugelpackung*, wenn die Anordnung der entsprechenden Kugeln den \mathbb{R}^3 mit möglichst kleinen Zwischenräumen ausfüllt. Diese beiden Begriffsbildungen lassen sich in natürlicher Weise auch auf die Räume \mathbb{R}^d einer beliebigen Dimension d übertragen.

Es stellt sich somit die Aufgabe, die dichtesten Kugelpackungen des \mathbb{R}^d für die Dimensionen $d = 1, 2, 3, \dots$ zu bestimmen. Dabei erhalten wir die Dichte δ einer Kugelpackung, indem wir einen Würfel der Seitenlänge ℓ im \mathbb{R}^d betrachten, in den wir soviele Kugeln der entsprechenden Kugelpackung wie möglich packen, und

Der vorliegende Text ist eine leichte Überarbeitung der Laudatio, die der Autor anlässlich der Verleihung der Gauß-Medaille der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft an Maryna Viazovska im April 2023 gehalten hat und die im Jahrbuch 2023 dieser Gesellschaft publiziert wurde.

✉ Jürg Kramer

Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6, 10099 Berlin,
Deutschland

E-Mail: kramer@math.hu-berlin.de

Abb. 1 Hexagonale Kugelpackung im \mathbb{R}^3 (Photo: mit freundlicher Genehmigung von Sunny for Getty Images)



dann das Verhältnis des Volumens all' dieser Kugeln zum Würfelvolumen ℓ^d für immer größer werdendes ℓ , genauer gesagt, den Grenzwert $\ell \rightarrow \infty$, bestimmen. Damit besteht unsere Aufgabe also darin, unter allen möglichen Kugelpackungen eine zu finden, die maximale Dichte besitzt.

Bei der Lösung unserer Aufgabe kommt erschwerend dazu, dass es nicht klar ist, ob die gesuchte dichteste Kugelpackung von einer regelmäßigen oder unregelmäßigen Anordnung der betrachteten Kugeln im \mathbb{R}^d kommt. Obwohl, wie wir gleich sehen werden, die dichteste Kugelpackung in den Dimensionen $d = 2$ und $d = 3$ durch regelmäßige Anordnungen der Kugeln gegeben sind, gibt es auch Dimensionen, in denen dies nicht der Fall ist.

2 Gitter-Kugelpackungen

Kugelpackungen mit regelmäßig angeordneten Kugeln erhält man mit Hilfe von sogenannten Gitter-Kugelpackungen, die wir jetzt beschreiben wollen. Dazu nennen wir eine Teilmenge $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, die durch alle ganzzahligen Linearkombinationen von d linear unabhängigen Vektoren v_1, \dots, v_d des \mathbb{R}^d gegeben ist, ein *Gitter*; in Formeln

$$\Lambda = \mathbb{Z} \cdot v_1 + \dots + \mathbb{Z} \cdot v_d.$$

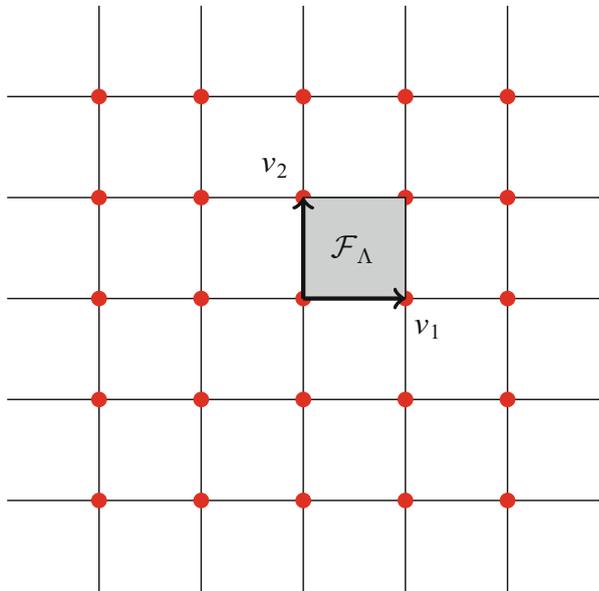
Das von den Basisvektoren v_1, \dots, v_d aufgespannte Parallelotop, d. h. die Menge

$$\{\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_d \cdot v_d \mid 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_d \leq 1\},$$

wird die *Fundamentalmasche* von Λ genannt und mit \mathcal{F}_Λ bezeichnet.

Die roten Punkte des nachfolgenden Bildes (vgl. Abb. 2) zeigen das 2-dimensionale quadratische Gitter, das durch die beiden Einheitsvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

Abb. 2 2-dim. quadratisches Gitter



$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^2 aufgespannt wird. Die Fundamentalmasche \mathcal{F}_Λ ist in diesem Fall ein Quadrat.

Es liege nun ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ vor. Dazu können wir wie folgt eine regelmäßige Kugelpackung konstruieren: Wir suchen zunächst nach den vom Nullvektor verschiedenen Vektoren $x \in \Lambda$, die kürzeste Länge $\|x\|$ haben, und wählen r dann als die Hälfte dieser Länge, d. h. wir setzen

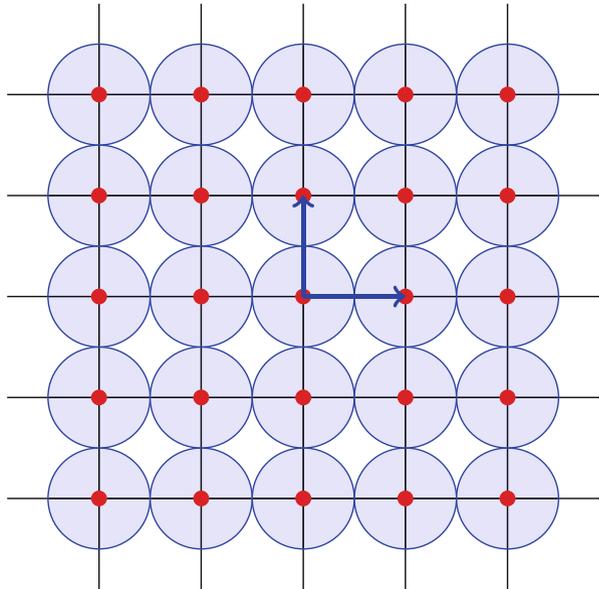
$$r = \frac{1}{2} \cdot \min \{ \|x\| \mid x \in \Lambda, x \neq 0 \}.$$

Indem wir jetzt Kugeln vom Radius r an den Gitterpunkten von Λ platzieren, erhalten wir die gewünschte regelmäßige Kugelpackung, die wir die *Gitter-Kugelpackung zum Gitter Λ* nennen.

Für das zuvor betrachtete Beispiel des 2-dimensionalen quadratischen Gitters erkennt man sofort, dass die Länge der kürzesten Gittervektoren 1 ist und somit $r = 1/2$ gilt. Die dazugehörige Gitter-Kugelpackung ist in der nachfolgenden Abbildung (vgl. Abb. 3) dargestellt. Aufgrund der Regelmäßigkeit einer Gitter-Kugelpackung benötigt man zur Berechnung ihrer Dichte δ keinen Grenzwertprozess wie im allgemeinen Fall, man hat lediglich das Verhältnis des Volumens der betrachteten Kugeln zum Volumen der Gittermasche zu bilden. Bezeichnet $B_d(r)$ eine Kugel vom Radius r im \mathbb{R}^d , so ist ihr Volumen durch die Formel

$$\text{vol}(B_d(r)) = \frac{\pi^{d/2} \cdot r^d}{(d/2)!}$$

Abb. 3 Kugelpackung zum 2-dim. quadratischen Gitter



gegeben, wobei $(d/2)! = \Gamma(d/2 + 1)$ mit der Eulerschen Gammafunktion gilt, wenn d ungerade ist. Damit berechnet sich die Dichte δ der betrachteten Gitter-Kugelpackung einfach zu

$$\delta = \frac{\text{vol}(B_d(r))}{\text{vol}(\mathcal{F}_\Lambda)} = \frac{\pi^{d/2} \cdot r^d}{(d/2)!} \cdot \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{F}_\Lambda)}.$$

Für das Beispiel der Kugelpackung zum 2-dimensionalen quadratischen Gitter ergibt sich somit als Dichte

$$\delta = \frac{\pi \cdot (1/2)^2}{1!} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \approx 0,78539\dots,$$

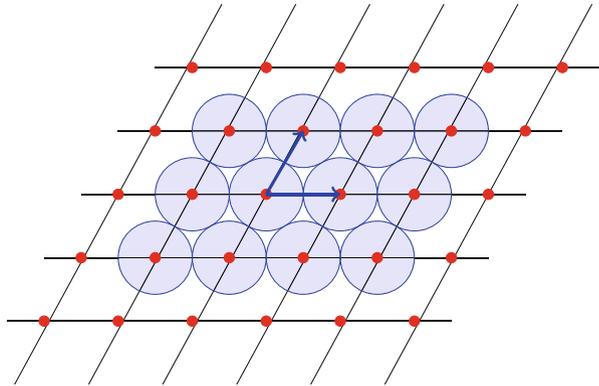
d. h. die betrachtete Gitter-Kugelpackung füllt ca. 78% der Ebene aus.

3 Dichteste Kugelpackungen für $d = 1, 2, 3$

Ist $d = 1$, so hat die dichteste Kugelpackung die Dichte $\delta = 1$. Dies erkennt man sofort, indem man das 1-dimensionale Gitter auf der reellen Zahlengeraden \mathbb{R} betrachtet, das durch den Einheitsvektor $v_1 = 1$ aufgespannt wird. Die entsprechende 1-dimensionale „Kugel“ füllt die Fundamentalmasche dieses Gitters, die nichts anderes als das Einheitsintervall ist, vollständig aus.

Ist $d = 2$, so hat die zuvor betrachtete Kugelpackung zum 2-dimensionalen quadratischen Gitter nicht maximale Dichte. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass die Kugelpackung zum 2-dimensionalen hexagonalen Gitter (vgl. Abb. 4) eine

Abb. 4 Kugelpackung zum 2-dim. hexagonalen Gitter



größere Dichte hat. Da auch im Fall der Kugelpackung zum 2-dimensionalen hexagonalen Gitter $r = 1/2$ gilt, aber das Volumen der Fundamentalmasche hier durch $\sqrt{3}/2$ gegeben ist, ergibt sich deren Dichte zu

$$\delta = \frac{\pi \cdot (1/2)^2}{1!} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0,90689\dots,$$

d. h. die Kugelpackung zum 2-dimensionalen hexagonalen Gitter deckt mehr als 90% der Ebene ab.

Bereits 1773 bewies Joseph-Louis Lagrange, dass die Kugelpackung zum 2-dimensionalen hexagonalen Gitter unter allen Gitter-Kugelpackungen die dichteste ist. Es dauerte allerdings mehr als 100 Jahre bis Axel Thue im Jahr 1892 mit seiner Arbeit [7] beweisen konnte, dass die Kugelpackung zum 2-dimensionalen hexagonalen Gitter unter *allen* Kugelpackungen der Ebene die dichteste ist.

Wenden wir uns nun dem Fall $d = 3$ zu: In diesem Fall ist man als erstes zur Kugelpackung zum 3-dimensionalen kubischen Gitter mit $r = 1/2$ und Fundamentalmaschenvolumen 1 geführt, was zur Dichte

$$\delta = \frac{\pi^{3/2} \cdot (1/2)^3}{3 \sqrt{\pi}/4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52359\dots$$

führt (vgl. Abb. 5). Es wurde aber bereits im Jahr 1611 von Johannes Kepler vermutet, dass die Kugelpackung zum 3-dimensionalen hexagonalen Gitter mit $r = 1/2$ und Fundamentalmaschenvolumen $\sqrt{2}/2$ mit der Dichte

$$\delta = \frac{\pi^{3/2} \cdot (1/2)^3}{3 \sqrt{\pi}/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,74048\dots$$

unter allen 3-dimensionalen Kugelpackungen die dichteste ist (vgl. Abb. 6). Carl Friedrich Gauß bewies 1831 die Kepler-Vermutung für Gitter-Kugelpackungen. Es vergingen mehr als 150 Jahre, bis Thomas Hales im Jahr 1998 einen Computerbeweis

Abb. 5 Kugelpackung zum
3-dim. kubischen Gitter

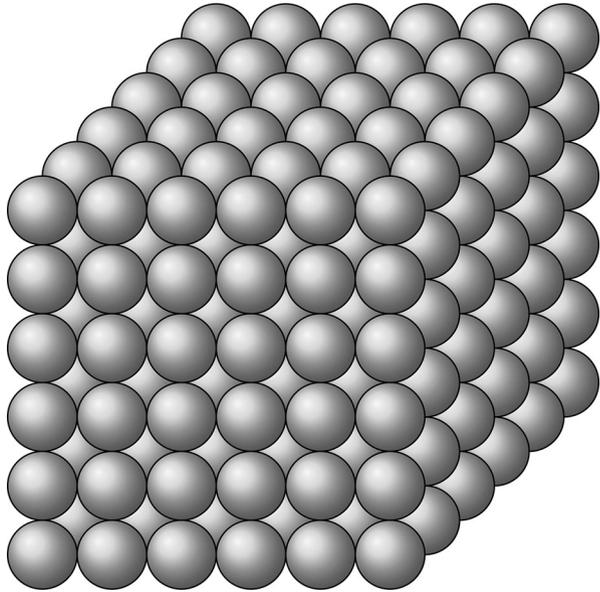
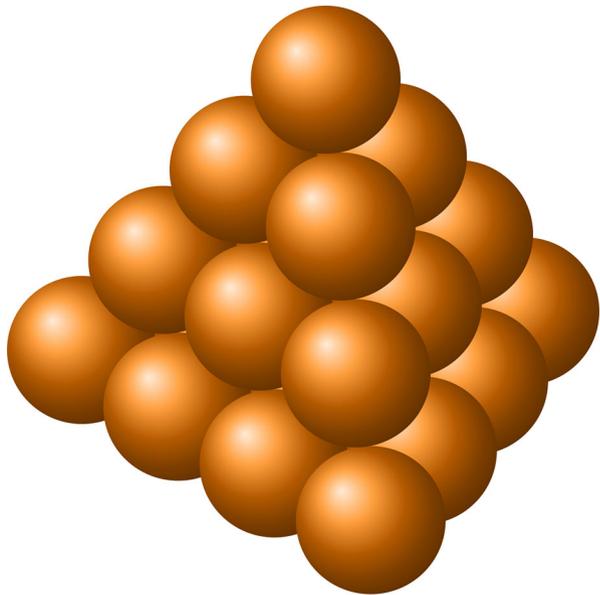


Abb. 6 Kugelpackung zum
3-dim. hexagonalen Gitter



vorlegte, der die Kepler-Vermutung vollständig löste. Allerdings vergingen sieben weitere Jahre, bis dieser Beweis geprüft war, so dass er in [6] erscheinen konnte.

Bis zum Jahr 2016 waren keine dichteste Kugelpackungen in Dimensionen $d > 3$ bekannt.

4 Maryna Viazovskas Durchbruch

Zur Überraschung der mathematischen Öffentlichkeit gelang es Maryna Viazovska (vgl. Abb. 7) im Jahr 2016 die dichteste Kugelpackung in Dimension $d = 8$ zu bestimmen.

Diese geht, wie in den Dimensionen $d = 1, 2, 3$, wiederum aus einer Gitter-Kugelpackung hervor. Das dafür benötigte Gitter in \mathbb{R}^8 ist das sogenannte Gitter E_8 , welches durch

$$E_8 = \{(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \mid x_1, \dots, x_8 \text{ ganzzahlig oder } x_1, \dots, x_8 \text{ halbganz:} \\ \text{die Summe } x_1 + \dots + x_8 \text{ ist gerade}\}$$

gegeben ist. Das Gitter E_8 ist ein sogenanntes gerades und unimodulares Gitter. Es taucht in vielen Gebieten der Mathematik, wie zum Beispiel in der Darstellungstheorie, der Codierungstheorie, der Topologie oder der Zahlentheorie, auf. Es ergibt sich

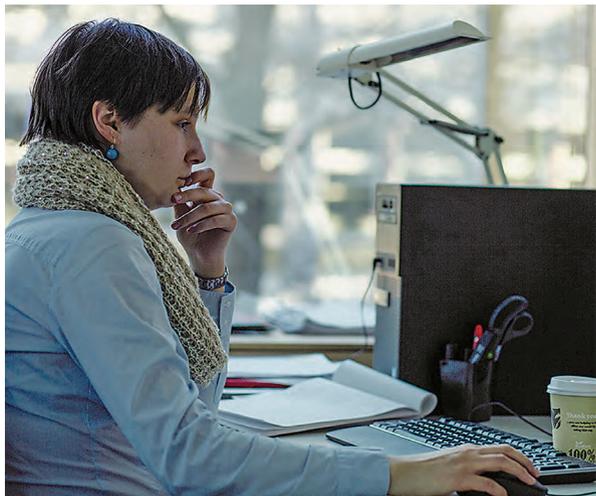
$$r = \frac{1}{2} \cdot \min \{\|x\| \mid x \in E_8, x \neq 0\} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aufgrund der Unimodularität hat die Fundamentalmasche von E_8 das Volumen 1. Damit können wir das erste Hauptresultat von Maryna Viazovska formulieren.

Hauptergebnis 1 (M. Viazovska [8]) *Die dichteste Kugelpackung in Dimension $d = 8$ ist die Gitter-Kugelpackung zum Gitter E_8 mit der Dichte*

$$\delta = \frac{\pi^{8/2} \cdot (\sqrt{2}/2)^8}{(8/2)!} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\pi^4}{384} \approx 0,25367\dots$$

Abb. 7 Maryna Viazovska
(Photo: mit freundlicher Genehmigung von Daniil Yevtushinsky)



Somit füllt die dichteste Kugelpackung lediglich ca. 25% des 8-dimensionalen Raumes aus!

Hauptergebnis 2 (M. Viazovska mit H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko [4]) Die dichteste Kugelpackung in Dimension $d = 24$ ist die Gitter-Kugelpackung zum Leech-Gitter Λ_{24} mit der Dichte

$$\delta = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0,00192\dots$$

Damit füllt die dichteste Kugelpackung nur ca. 2‰ des 24-dimensionalen Raumes aus!

Das Leech-Gitter Λ_{24} ist in Analogie zum Gitter E_8 auch gerade und unimodular mit kürzestem Gittervektor der Länge 2.

5 Beweisstrategie

Zum Beweis ihres ersten Hauptergebnisses knüpfte Maryna Viazovska an ein Ergebnis von Henry Cohn und Noam Elkies aus dem Jahr 2003 an. Um dieses Resultat zu beschreiben, benötigen wir die folgenden Begriffsbildungen:

- Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *schnell abfallend*, falls für jede Konstante $c > 0$ die Abschätzung $f(x) = O(\|x\|^{-c})$ gilt, sobald $\|x\| \rightarrow \infty$ strebt.
- Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Schwartz-Funktion*, falls f unendlich oft stetig differenzierbar ist und alle ihre partiellen Ableitungen schnell abfallend sind.
- Die *Fourier-Transformierte* einer Schwartz-Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch die Formel

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx_1 \cdots dx_d \quad (y \in \mathbb{R}^d).$$

Das einleitend genannte Ergebnis von Henry Cohn und Noam Elkies ist durch den folgenden Satz gegeben.

Satz (H. Cohn, N. Elkies [3]) Es sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Schwartz-Funktion und r eine positive reelle Zahl. Falls gilt:

- (1) $\widehat{f}(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \geq r$,
- (2) $\widehat{f}(y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$,
- (3) $f(0) = \widehat{f}(0) = 1$,

dann ist die maximale Dichte δ einer Kugelpackung im \mathbb{R}^d nach oben beschränkt durch die Zahl

$$\frac{\pi^{d/2} \cdot (r/2)^d}{(d/2)!}.$$

Dieses Ergebnis kann bei der Suche nach einer Kugelpackung im \mathbb{R}^d mit maximaler Dichte wie folgt angewendet werden: Kennt man eine Kugelpackung und deren Dichte δ im \mathbb{R}^d und findet andererseits eine gerade Schwartz-Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sowie eine positive reelle Zahl r , so dass die Gleichheit

$$\delta = \frac{\pi^{d/2} \cdot (r/2)^d}{(d/2)!}$$

gilt, dann weiss man, dass die bekannte Kugelpackung maximale Dichte hat. Aus diesem Grund spielt die Konstruktion einer geraden Schwartz-Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sowie der dazugehörigen positiven reellen Zahl r eine entscheidende Rolle bei der Suche nach Kugelpackungen im \mathbb{R}^d mit maximaler Dichte. Aus diesem Grund wird eine solche Schwartz-Funktion f mit den Eigenschaften (1)–(3) eine *magische Funktion* genannt.

Für den Beweis ihres ersten Hauptergebnisses gelang Maryna Viazovska für die Dimension $d = 8$ die bahnbrechende Entdeckung einer magischen Funktion $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ mit zugehörigem $r = \sqrt{2}$. Nach dem Satz von Henry Cohn und Noam Elkies muss damit die maximale Dichte einer Kugelpackung im \mathbb{R}^8 durch die Zahl

$$\frac{\pi^{8/2} \cdot (\sqrt{2}/2)^8}{(8/2)!} = \frac{\pi^4}{3 \cdot 2^7} = \frac{\pi^4}{384}$$

beschränkt sein. Auf der anderen Seite wissen wir aber, dass die Gitter-Kugelpackung zum Gitter E_8 genau diese Dichte besitzt. Somit hat diese Kugelpackung maximale Dichte.

Eine wunderbare Würdigung der Leistung von Maryna Viazovka wird durch das nachfolgende Zitat von Henry Cohn in [2] wiedergegeben:

“When Elkies and I proposed this method in 1999, Viazovska was still in secondary school. Without realizing how profoundly difficult the remaining step was, I imagined that we had almost solved the sphere packing problem in eight and twenty-four dimensions, and our inability to find the magic functions was extremely frustrating. At first, I worried that someone else would find an easy solution and leave me feeling foolish for not doing it myself. Over time I became convinced that obtaining these functions was in fact difficult ... Eventually, instead of worrying that someone else would solve it, I began to fear that nobody would solve it, and that I would someday die without knowing the outcome...”

Im letzten Teil unserer Würdigung der Arbeiten von Maryna Viazovska wollen wir nun etwas genauer auf die Konstruktion der oben erwähnten magischen Funktion eingehen. Dazu müssen wir uns zuerst aber mit dem Begriff einer Modulform vertraut machen, was wir im nächsten Abschnitt tun wollen.

6 Modulformen

Es ist nicht ganz einfach, einer allgemeinen akademischen Öffentlichkeit den Begriff einer „Modulform“ vorzustellen. Lassen Sie es uns dennoch versuchen, Modulformen zu verstehen. Dazu erinnern wir an ein einfaches Analogon, das aus der Schulzeit bekannt sein sollte.

Wir suchen nach reellwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die 1-periodisch und gerade sind, d.h. Funktionen, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ den beiden Funktionalgleichungen

$$f(x+1) = f(x) \quad \text{und} \quad f(-x) = f(x)$$

genügen. Etwas mathematischer formuliert, betrachten wir die auf \mathbb{R} operierende diskrete Gruppe Γ , die durch die Translation um 1 und die Spiegelung am Nullpunkt erzeugt wird. Somit suchen wir nach den reellwertigen Funktionen, die unter der Wirkung von Γ *invariant* sind. Beispiele solcher Funktionen sind mit Hilfe trigonometrischer Funktionen leicht anzugeben, beispielsweise erfüllen die beiden Funktionen

$$f(x) = \cos(2\pi x) \quad \text{oder} \quad f(x) = \sin^2(2\pi x)$$

die gewünschten Anforderungen. Um den Begriff einer Modulform einzuführen, gilt es nun die vorhergehenden Überlegungen in die komplexe Welt, auch hyperbolische Welt genannt, zu übertragen. Dazu betrachten wir anstelle der reellen Zahlengeraden die obere komplexe Halbebene, d.h.

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

Auf \mathbb{H} operiert die diskrete Gruppe Γ , welche durch die Translation um 1 und die sogenannte hyperbolische Spiegelung, d.h. durch die beiden Bewegungen

$$z \mapsto z + 1 \quad \text{und} \quad z \mapsto -\frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{H}),$$

erzeugt wird. In Analogie zu unserem einleitenden Beispiel suchen wir nun nach den komplexwertigen Funktionen $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, welche unter der Wirkung von Γ invariant sind, d.h. welche für alle $z \in \mathbb{C}$ die beiden Funktionalgleichungen

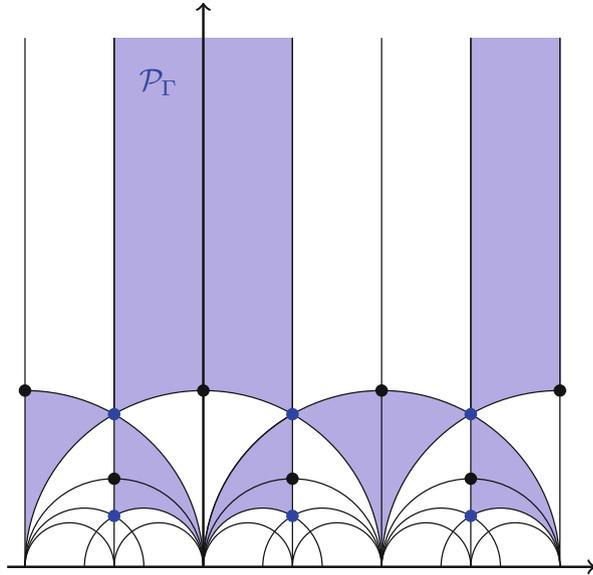
$$f(z+1) = f(z) \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = f(z)$$

erfüllen. Solche Funktionen werden *Modulformen vom Gewicht 0* zu Γ genannt.

Die Gruppe Γ lässt sich mit Hilfe der gebrochen linearen Transformationen genauer beschreiben; sie besteht nämlich aus allen Bewegungen der Art

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (z \in \mathbb{H}),$$

Abb. 8 Visualisierung von Fundamentalbereichen \mathcal{P}_Γ zu Γ (Bild: mit freundlicher Genehmigung von Anna Pippich)



wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, d.h. eine (2×2) -Matrix mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1. Die Gruppe Γ wird *Modulgruppe* genannt. Mit Hilfe der Wirkung von Γ lassen sich die Punkte der oberen Halbebene \mathbb{H} in Äquivalenzklassen einteilen. Dabei sind zwei Punkte $z, w \in \mathbb{H}$ zueinander äquivalent, falls $w = (az + b)/(cz + d)$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt.

Es zeigt sich nun, dass sich die obere Halbebene \mathbb{H} mit „Pflastersteinen“ \mathcal{P}_Γ , den sogenannten *Fundamentaltbereichen* zu Γ , derart lückenlos überdecken lässt, dass jeder dieser Pflastersteine genau einen Punkt aus den zuvor definierten Äquivalenzklassen enthält (vgl. Abb. 8).

Unsere vorhergehende Definition von Modulformen vom Gewicht 0 zu Γ besagt also, dass es sich um komplexwertige (meromorphe) Funktionen $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ handelt, welche für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und alle $z \in \mathbb{H}$ den Funktionalgleichungen

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = f(z) \tag{1}$$

genügen. Diese Funktionen sind also periodisch bezüglich der zuvor beschriebenen Pflasterung der oberen Halbebene.

Um endlich zum Begriff einer Modulform von höherem Gewicht zu kommen, bilden wir die komplexe Ableitung einer Modulform vom Gewicht 0 zu Γ und erhalten aus den Funktionalgleichungen (1) die Gleichungen

$$f' \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) (cz + d)^{-2} = f'(z).$$

Dies motiviert die folgende Begriffsbildung: Es sei k eine natürliche Zahl; eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine *Modulform vom Gewicht k zu Γ* , falls f holomorph ist und für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ und alle $z \in \mathbb{H}$ den Funktionalgleichungen

$$f \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) (cz + d)^{-k} = f(z)$$

genügt. Da f insbesondere 1-periodisch ist, besitzt f eine Fourierreihe, von der man zusätzlich fordert, dass sie von der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

ist, d. h. alle Fourierkoeffizienten a_n mit negativem n müssen verschwinden.

Wir illustrieren den Begriff einer Modulform anhand von zwei zahlentheoretisch motivierten Beispielen:

(1) *Eisensteinreihen*: Für gerade natürliche Zahlen $k > 2$ betrachten wir die Reihen

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz + n)^k},$$

wobei $\zeta(k)$ den Wert der Riemannschen Zetafunktion an der Stelle k bedeutet. Diese Reihen konvergieren absolut und lokal gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{H}$. Es stellt sich heraus, dass sie Modulformen vom Gewicht k zu Γ sind, die sogenannten *Eisensteinreihen vom Gewicht k* (vgl. Abb. 9). Die Fourierkoeffizienten a_n von $E_k(z)$ haben arithmetische Bedeutung; für positive Indices n gilt nämlich

$$a_n = \frac{1}{\zeta(k)} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d|n} d^{k-1},$$

d. h. die Fourierkoeffizienten beinhalten die zahlentheoretisch interessanten Teilersummen $\sum_{d|n} d^{k-1}$.

(2) *Thetareihen*: Wir betrachten die Reihe

$$\vartheta(z) = \sum_{(n_1, \dots, n_4) \in \mathbb{Z}^4} e^{\pi i(n_1^2 + \dots + n_4^2)z}.$$

Es stellt sich heraus, dass $\vartheta(z)$ eine Modulform vom Gewicht 2, allerdings nicht zur Gruppe Γ , sondern zur Untergruppe

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a, d \text{ ungerade; } b, c \text{ gerade} \right\}$$

ist, d. h. die Thetareihe erfüllt für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$ und alle $z \in \mathbb{H}$ die Funktionalgleichungen

$$\vartheta\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)(cz + d)^{-2} = \vartheta(z).$$

Sie hat eine Fourierreentwicklung der Form

$$\vartheta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{\pi i n z},$$

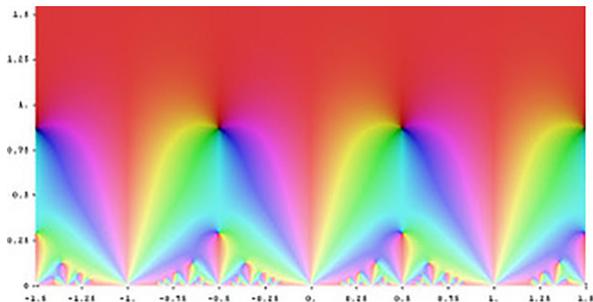
d. h. $\vartheta(z)$ ist nicht 1-periodisch, sondern 2-periodisch. Die Fourierkoeffizienten b_n sind gegeben durch die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe von vier Quadratzahlen, also

$$b_n = \#\{(n_1, \dots, n_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = n_1^2 + \dots + n_4^2\}.$$

Für ungerade natürliche Zahlen n gilt beispielsweise

$$b_n = 8 \cdot \sum_{d \mid n} d.$$

Abb. 9 Plot des Absolutbetrags der Eisensteinreihe $E_4(z)$ (Bild: mit freundlicher Genehmigung von Jan Homann)



Damit schließen wir jetzt unsere Ausführungen zum Begriff einer Modulform; die interessierte Leserschaft kann der reichen Literatur zu Modulformen weitere Einzelheiten entnehmen, beispielsweise dem Buch [9]. Wir sind jetzt in der Lage Maryna Viazovska’s geniale Konstruktion der magischen Funktion zu geben.

7 Konstruktion der magischen Funktion

Möglicherweise liess sich Maryna Viazovska bei der Konstruktion der magischen Funktion $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ von Martin Eichlers Philosophie leiten, dass man mit Hilfe von Modulformen (fast) alles berechnen kann. Martin Eichler (vgl. Abb. 10), ein Pionier bei der Erforschung von Modulformen, sagte nämlich: „Neben der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bilden die Modulformen die fünfte Grundrechenart!“

Wir kommen nun zur Beschreibung der magischen Funktion $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$; dazu stellen wir zuerst zwei Hilfsfunktionen bereit.

- (1) Die Hilfsfunktion ψ : Mit Hilfe der Eisensteinreihen $E_k(z)$ ($k > 2$, gerade) führen wir zunächst die Modulform

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728} (E_4^3(z) - E_6^2(z))$$

vom Gewicht 12 zu Γ ein. Mit der Thetareihe $\vartheta(z)$ und $\tilde{\vartheta}(z) = \vartheta(z + 1)$ definieren wir damit die erste Hilfsfunktion durch

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{\tilde{\vartheta}^3(z) (5\vartheta^2(z) - 5\vartheta(z)\tilde{\vartheta}(z) + 2\tilde{\vartheta}^2(z))}{\Delta(z)} \\ &= 2q^{-1} + 288 - 10240q + 141048q^2 + \dots \end{aligned}$$

wobei $q = e^{2\pi iz}$ gesetzt wurde.

- (2) Die Hilfsfunktion ϕ : Aus Gründen der absoluten Konvergenz war es für die Definition der Eisensteinreihen $E_k(z)$ nötig, $k > 2$ zu fordern. Es zeigt sich nun, dass es auch möglich ist, eine Eisensteinreihe $E_2(z)$ vom Gewicht 2 zu Γ zu definieren; dies geschieht durch Angabe ihrer Fourierentwicklung

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d \right) q^n.$$

$E_2(z)$ ist allerdings keine Modulform vom Gewicht 2 zu Γ , denn sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$E_2\left(-\frac{1}{z}\right) z^{-2} = E_2(z) - \frac{6i}{\pi z};$$

man spricht von einer *Quasi-Modulform vom Gewicht 2* zu Γ . Damit lässt sich die zweite Hilfsfunktion in der Form

$$\phi(z) = \frac{(E_2(z) E_4(z) - E_6(z))^2}{\Delta(z)}$$

angeben.

Mit den beiden Hilfsfunktionen $\psi(z)$ und $\phi(z)$ können wir jetzt das zentrale Ergebnis von Maryna Viazovska wie folgt formulieren.

Hauptsatz (M. Viazovska [8]) Die magische Funktion $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ zu $r = \sqrt{2}$ mit

- (1) $\widehat{f}(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^8$ mit $\|x\| \geq r$,
- (2) $\widehat{f}(y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^8$,
- (3) $f(0) = \widehat{f}(0) = 1$,

ist gegeben durch

$$f(x) = 4 \sin^2(\pi \|x\|^2/2) \int_0^\infty \left(-t^2 \phi\left(\frac{i}{t}\right) + \psi(it) \right) e^{-\pi t \|x\|^2} dt$$

für $\|x\| \geq r = \sqrt{2}$.

Durch die im vorhergehenden Hauptsatz gegebene explizite Konstruktion der magischen Funktion gelingt Maryna Viazovska, wie bereits dargestellt, der Nachweis,

Abb. 10 Martin Eichler, 1912–1992 (Photo: mit freundlicher Genehmigung von Konrad Jacobs, Erlangen)



dass die Gitter-Kugelpackung zum Gitter E_8 maximale Dichte hat. Auch wenn das dabei auftretende Gitter E_8 vielleicht eine Verbindung zur Welt der Modulformen hätte suggerieren können, ist die explizite Angabe der magischen Funktion in Termen von klassischen Modulformen ein mathematisches Meisterwerk. Es ist deshalb nicht überraschend, dass Maryna Viazovska im Jahr 2022 mit der Fields-Medaille und in der Folge mit weiteren Preisen, wie beispielsweise der Gauß-Medaille, geehrt wurde.

Danksagung Der Autor dankt der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft für die Freigabe des vorliegenden Textes zur Publikation in den *Mathematischen Semesterberichten*, der in leicht veränderter Form im Jahrbuch 2023 dieser Gesellschaft erschienen ist.

Der Autor dankt für die Unterstützung durch den DFG-Exzellenzcluster MATH+.

Funding Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

Interessenkonflikt Der Autor erklärt, dass kein Interessenkonflikt besteht.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

1. Cohn, H.: A conceptual breakthrough in sphere packing. *Not. Am. Math. Soc.* **64**(2), 102–115 (2017)
2. Cohn, H.: The work of Maryna Viazovska. In: *Proc. Int. Cong. Math.*, Bd. 1. (2022)
3. Cohn, H., Elkies, N.: New upper bounds on sphere packings I. *Ann. Math. (2)* **157**(2), 689–714 (2003)
4. Cohn, H., Kumar, A., Miller, S.D., Radchenko, D., Viazovska, M.: The sphere packing problem in dimension 24. *Ann. Math. (2)* **185**(3), 1017–1033 (2017)
5. Conway, J.H., Sloane, N.J.A.: *Sphere Packings, Lattices and Groups*, 3. Aufl. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 290. Springer, New York (1999)
6. Hales, T.C.: A proof of the Kepler conjecture. *Ann. Math. (2)* **162**(3), 1065–1185 (2005)
7. Thue, A.: Om nogle geometrisk-taltheoretiske Theoremer. *Forhandlingerne Ved De Skandinaviske Naturforskere* **14**, 352–353 (1892)
8. Viazovska, M.: The sphere packing problem in dimension 8. *Ann. Math. (2)* **185**(3), 991–1015 (2017)
9. Zagier, D.: Elliptic modular forms and their applications. In: Ranestad, K. (Hrsg.) *The 1–2–3 of Modular Forms*, S. 1–103. Springer, Berlin (2008). Universitext

Hinweis des Verlags Der Verlag bleibt in Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutsadressen neutral.