LIEBEN, Christoph; FISCHER, Michael
Berlin, Graz

Fußballspiele sind (keine) Zufallsexperimente – Modellieren und Simulieren mit dem Bradley-Terry-Modell

Deutschland ist auch 2024 nicht Fußball-Europameister geworden. War das einfach nur Pech? Oder war ein Triumph von Beginn an unwahrscheinlich? In diesem Beitrag stellen wir einen zugänglichen, mathematisch fundierten Ansatz zur Modellierung und computergestützten Simulation des Ausgangs von Fußballspielen vor, mit dem sich Fragen dieser Art analysieren lassen. Zunächst führen wir dazu das weitverbreitete Bradley-Terry-Modell ein und beleuchten anschließend dessen didaktisches Potenzial.

Fachlicher Hintergrund: das Bradley-Terry-Modell

Viele schultypische Zufallsexperimente mit unbestimmten Ergebniswahrscheinlichkeiten, wie etwa das Werfen von Reißzwecken oder Bausteinen, können im Unterricht ohne großen Aufwand oft genug durchgeführt werden, um diese Wahrscheinlichkeiten aus den beobachteten relativen Häufigkeiten abzuleiten (Biehler et al., 2023). Ein Fußballspiel ist in diesem Sinne kein klassisches Zufallsexperiment – zumindest keines, das beliebig oft wiederholt werden kann. Zwar haben die meisten Teams in der Vergangenheit schon einmal gegeneinander gespielt, in der Regel aber mit anderen Kadern, in anderen Stadien oder unter anderen Wetterbedingungen.

In dieser und vielen vergleichbaren Situationen (Fischer, 2022), können wir das sogenannte *Bradley-Terry-Modell* nutzen. In diesem Modell gewinnt Team A gegen Team B (Schreibweise: $A \succ B$) mit der Wahrscheinlichkeit

$$p(A \succ B) = \frac{\pi_A}{\pi_A + \pi_B},$$

wobei π_A bzw. π_B die *Spielstärke* von Team A bzw. Team B bezeichnet. Diese Spielstärken sind aber nicht explizit gegeben – sie müssen geschätzt oder auf Basis von Annahmen bestimmt werden, wie es beim Modellieren üblich ist (Kaiser et al., 2023). Sind die Spielstärken der Teams festgelegt, lässt sich ein Spiel zwischen ihnen als Zufallsexperiment modellieren.

Die Idee, Gewinnwahrscheinlichkeiten als Relation latenter Spielstärken zu modellieren, geht wohl ursprünglich auf Zermelo (1929) zurück. Das Modell trägt heute jedoch die Namen von R. A. Bradley und M. E. Terry, die auf Grundlage dieser Idee eine Maximum-Likelihood-Methode zur Schätzung der Spielstärken aus realen Spielergebnissen entwickelt haben (Bradley & Terry, 1952). Diese Methode wird bis heute verwendet, um aus einzelnen Paarvergleichen globale Ranglisten zu erstellen.

In seiner Grundform erlaubt das Bradley-Terry-Modell kein Unentschieden. Es kann jedoch auf verschiedene Weise entsprechend erweitert werden, zum Beispiel durch die Festlegung einer Remis-Wahrscheinlichkeit $p(A{\sim}B)$. Außerdem geht das Bradley-Terry-Modell davon aus, dass die zugewiesenen Spielstärken transitiv sind, was unter anderem Spiele nach dem Schere-Stein-Papier-Prinzip ausschließt. Eventuelle systematische Vor- oder Nachteile gegenüber bestimmten Gegnern werden hier also nicht berücksichtigt. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass die Spielstärken verhältnisskaliert sind, sodass für sie nur positive Zahlen infrage kommen. Andernfalls wäre p aber auch kein wohldefiniertes Wahrscheinlichkeitsmaß.

Didaktisches Potenzial

Die Modellierung eines Fußballturniers mithilfe des Bradley-Terry-Modells zur Ermittlung des wahrscheinlichsten Turniersiegers erfüllt zwei zentrale Anforderungen an instruktive Modellierungsumgebungen: Authentizität und Offenheit (vgl. Kaiser et al., 2023, S. 411). Das zugrundeliegende Problem ist authentisch, da es einerseits ein großes persönliches Interesse bei der Zielgruppe weckt, aber andererseits auch außerhalb des Mathematikunterrichts eine hohe, nicht zuletzt kommerzielle Relevanz besitzt.

Gleichzeitig bleibt es den Schüler*innen offen, wie sie die Spielstärken der Teams festlegen. Möglich sind auch einfache heuristische Überlegungen. So kann es zielführend sein, die Teams zunächst intuitiv nach ihrer Spielstärke zu sortieren und anschließend mit den Platzierungen in dieser Sortierung als Werten weiterzurechnen. Die Recherche nach einschlägigen Informationen könnte die Schüler*innen aber beispielsweise auch auf die Marktwerte der Teams als Schätzwert für ihre Spielstärke führen. Oder sie stoßen auf die FIFA-Weltrangliste, die jeder Nationalmannschaft eine Punktzahl zuweist – basierend auf einem Elo-Bewertungssystem, das wiederum selbst mit dem Bradley-Terry-Modell arbeitet (Düring et al., 2022).

Die Schüler*innen können ihr Bradley-Terry-Modell auch ohne ausgeprägte Vorkenntnisse in einem Tabellenkalkulationsprogramm implementieren. Nachdem sie die Stärken der gegeneinander antretenden Teams A und B festgelegt haben, berechnen sie die jeweiligen Gewinnwahrscheinlichkeiten $p(A \succ B)$ und $p(B \succ A) = 1 - (A \succ B)$ und generieren wiederholt Zufallszahlen zwischen 0 und 1. Liegen diese im Intervall $[0,\ p(A \succ B)]$, gewinnt Team A, andernfalls Team B (Abb. 1, links). Mit etwas Geschick lassen sich so auf Knopfdruck auch ganze K.-o.-Turniere mit festen Anfangspaarungen simulieren. Die Schüler*innen erhalten eine „virtuelle Empirie“ (Eichler, 2014, S. 264), die sie dann im Hinblick auf die Ausgangsfrage nach dem wahrscheinlichsten Turniersieger untersuchen können.

In Abb. 1 (rechts) sind exemplarisch die Ergebnisse von 100 Simulationen der K.-o.-Runde der EM 2024 auf Grundlage der damaligen Marktwerte abgebildet: Mit nur acht Turniersiegen hätte die deutsche Nationalmannschaft nach diesem Modell zumindest nicht zu den Topfavoriten gezählt.

	A	B	C
1	**Spanien**	vs.	**Deutschland**
2	965,5		831,0
3	=A2/(A2+C2)		=1-A3
4			
5			
6			
7			
8	Sieger:		
9	=WENN(ZUFALLSZAHL()<=A3;A1;C1)		

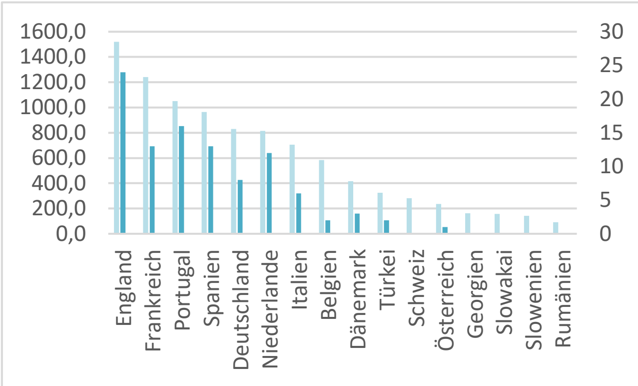

Abb. 1: Links das Bradley-Terry-Modell auf der Basis von Marktwerten in Excel. Rechts die Marktwerte (in Mio. EUR) und Turniersiege (von 100 Simulationen) der EM-2024-Achtelfinalisten.

Der Vergleich der eigenen Ergebnisse mit denen von Mitschüler*innen, die die Spielstärken der Teams anders festgelegt haben, bietet abschließend noch Potenzial für gemeinsame Plausibilitätsüberlegungen und Überarbeitungen. So wird der Dreischritt „Spekulieren-Experimentieren-Reflektieren“ nach Riemer (2023) vervollständigt.

Im Laufe des Modellierungsprozesses begegnen die Schüler*innen dabei ganz organisch den verschiedenen Facetten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, wie sie etwa von Biehler et al. (2023) beschrieben werden. Zu Beginn knüpft die Formel zur Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten im Bradley-Terry-Modell unmittelbar an den in der Schule verbreiteten Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff an: Die Gewinnwahrscheinlichkeit eines Teams entspricht dem relativen Anteil seiner Spielstärke an der Summe beider Spielstärken. Wenn diese Berechnungsformel dann mit den individuell festgelegten Spielstärken befüllt wird, erhält diese Gewinnwahrscheinlichkeit einen subjektivistischen Charakter im bayesschen Sinne. Der Interpretation der simulierten relativen Turniersieghäufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten liegt schließlich ein frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff zugrunde.

Einordnung und Ausblick

Dieser Beitrag ordnet sich ein in eine Reihe von Materialien zum Themenbereich Fußball, insbesondere zur Modellierung von Saisons und Turnieren (u. a. Ludwig et al., 2024; Weitendorf, 2018). Das hier präsentierten Projekt ermöglicht Schüler*innen aber nicht nur die flexible Modellierung eines Spielausgangs auf Basis eigener Annahmen, sondern auch die eigenständige

Implementierung und Simulation – ein zentrales Merkmal zeitgemäßen Stochastikunterrichts (Fischer, 2025). Die Anwendung des Bradley-Terry-Modells mit seinem binären Ausgang zur Simulation eines K.-o.-Turniers ist darüber hinaus ein Beispiel für eine in Raum und Zeit diskrete Modellierung. Diese gewinnen in der Mathematikdidaktik erst seit Kurzem an Bedeutung (Fischer, 2025; Lieben, 2024; Greefrath et al., 2022).

Literatur

Biehler, R., Engel, J., & Frischemeier, D. (2023). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 243–278). Springer Spektrum.

Bradley, R. A. & Terry, M. E. (1952). Rank Analysis of Incomplete Block Designs: I. The Method of Paired Comparisons. *Biometrika*, *39*(3/4), 324–345.

Düring, B., Fischer, M., & Wolfram, M.-T. (2022). An Elo-type rating model for players and teams of variable strength. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *380*(2224), 20210155.

Eichler, A. (2014). Simulation als Bindeglied zwischen der empirischen Welt der Daten und der theoretischen Welt des Zufalls. In Wassong, T., Frischemeier, D., Fischer, P., Hochmuth, R. & Bender, P. (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen*, (S. 251–265). Springer Spektrum.

Fischer, M. (2022). *Applications of interacting particle systems in life- and social-sciences across scales* (Dissertation). https://utheses.univie.ac.at/detail/64811

Fischer, M. (2025). Developing Probability Competences through the Implementation and Exploration of Random Walk Simulations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Greefrath, G., Siller, H.-S., Vorhölter, K., & Kaiser, G. (2022). Mathematical modelling and discrete mathematics: Opportunities for modern mathematics teaching. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(4), 865–879.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. (2023). Mathematisches Modellieren. In Bruder, R., Büchter, A., Gasteiger, H., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 399–428). Springer Spektrum.

Lieben, C. (2024). Agentenbasierte Modellierung im Mathematikunterricht – Potenziale und Herausforderungen anhand eines Beispiels. In Ebers, P., Rösken, F., Barzel, B., Büchter, A., Schacht, F. & Scherer, P. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024*. WTM-Verlag.

Ludwig, M., Barlovits, S., Oehler, K., Gogesch, I. & Gurjanow, I. (2024). *Fussballmathe*. https://fussball-mathe.de/kontakt/

Riemer, W. (2023). *Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik*. Klett Kallmeyer.

Weitendorf, J. (2018). Simulation einer Fußballbundesligasaison. In Greefrath, G. & Siller, H.-S. (Hrsg.), *Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht*, (S. 253–262). Springer Spektrum.

Zermelo, E. (1929). Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, *29*(1), 436–460.