

1 $0,9 \stackrel{?}{=} 1$

Ein Brautpaar diskutiert:

Das Gleichheitszeichen kann nicht zutreffen – egal, wie viele Neunen ich hinschreibe, es bleibt immer ein kleiner Unterschied d zu 1.

Bei 10 Neunen gilt $d = 1 - 0,999999999 = 0,000000001 = \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$,

bei 100 Neunen gilt $d = 1 - 0,999 \dots 999 = 0,000 \dots 001 = \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ und so weiter.



Nein, das Gleichheitszeichen ist korrekt.

Du behauptest also, dass es auf der Zahlengeraden zwischen $0,9$ und 1 einen positiven Abstand d gibt. Dann gib mir einen solchen Abstand vor.

Zum Beispiel $d = \left(\frac{1}{10}\right)^{1000}$. Dann schreibe ich 1001 Neunen hinter den Dezimalpunkt und damit ist der Abstand unterschritten. Bei $d = \left(\frac{1}{10}\right)^{10000}$ schreibe ich eben 10001 Neunen hinter den Dezimalpunkt und damit ist auch dieser Abstand unterschritten.

Egal, welchen noch so kleinen Abstand d du mir vorgibst, ich kann immer ein Teilstück von $0,9$ angeben, dessen Abstand zu 1 kleiner ist als d .



Welche Argumentation überzeugt euch mehr?

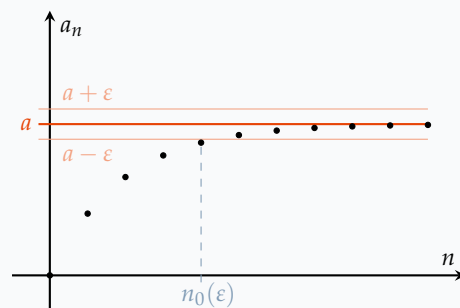
**Der Grenzwert einer Folge**

Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* der Folge (a_n) , falls es für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ gibt, nach dem alle Folgenglieder a_n weniger als ε von a entfernt sind.

Falls die Folge (a_n) den Grenzwert a hat, schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ und sagt:

- „Der Limes von (a_n) für n gegen unendlich ist a .“
- „Die Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a .“

Falls eine Folge keinen Grenzwert besitzt, *divergiert* die Folge.



Limes (Lat. „Grenze“)

2 Grenzwerte bestimmen und begründen

Es seien die folgenden Folgen gegeben:

(1) $a_n = 3 + \frac{4}{n}$

(2) $b_n = \sqrt{n}$

(3) $c_n = \frac{n^2-4}{2n^2}$

(4) $d_n = 2 + (-1)^n$

- (a) ☐ Untersuche die Folgen auf Konvergenz und vermute gegebenenfalls ihren Grenzwert.
- (b) ☒ Weise nun für die konvergenten Folgen rechnerisch nach, dass sie gegen den vermuteten Grenzwert konvergieren. Ermittle dafür zunächst für den konkreten Wert $\varepsilon = 0,01$ und dann für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ den Wert $n_0(\varepsilon)$, ab dem die Folgenglieder alle einen kleineren Abstand als ε vom Grenzwert haben.
- (c) ☒ Wie lässt sich für die divergenten Folgen beweisen, dass sie divergieren?

3 Wo steckt der Fehler?

Es gilt $\frac{1}{10^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,05$.
Denn wählt man $d = 0,1$, ist der Abstand aller Werte von $0,05$ kleiner als d .

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$.
Denn in jedem noch so schmalen Streifen um 1 liegen unendlich viele Werte.



4 Nullfolgen

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*.

- (a) ☐ Weise mithilfe der ε -Definition nach, dass die *harmonische Folge* (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist.
- (b) ☒ Beweise mithilfe von (a), dass auch die Folge (b_n) mit $b_n = \frac{n!}{n^n}$ eine Nullfolge ist.

5 Kleine, aber feine Unterschiede

☒ Die Folge (a_n) sei eine Nullfolge, d. h. es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Welche der folgenden Beschreibungen sind besonders präzise, welche weisen Ungenauigkeiten auf?



- (1) Die Folgenglieder a_n kommen mit wachsendem n der 0 immer näher.
- (2) Die Folgenglieder a_n kommen mit wachsendem n der 0 beliebig nahe.
- (3) Die Folgenglieder a_n kommen mit wachsendem n der 0 immer näher, ohne sie zu erreichen.
- (4) Die Folgenglieder a_n streben gegen 0 für n gegen unendlich.

Stellt eine Rangfolge auf und begründet eure Ergebnisse in der Klasse.

6 Grenzwerte von arithmetischen und geometrischen Folgen

- (a) ☐ Begründe kurz, dass eine arithmetische Folge (a_n) mit $a_n = a + n \cdot d$ nicht konvergent sein kann.
- (b) ☒ Untersuche die geometrischen Folge (a_n) mit $a_n = a \cdot q^n$ für die angegebenen Werte auf Konvergenz. Was passiert bei $q = 1$ und $q = -1$? Formuliere deine Ergebnisse als Satz. Findest du auch eine allgemeine Begründung?

	a	d
(1)	2	$\frac{3}{4}$
(2)	1	-2
(3)	-4	$-\frac{1}{3}$
(4)	0,1	1,05



Grenzwertsätze für Folgen

Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gelten:

Faktorregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lambda \cdot a \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}$$

Produktregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = a \cdot b$$

Summenregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = a + b$$

Quotientenregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \frac{a}{b},$$

falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n .

7 Grenzwerte mit Grenzwertsätzen

- (a) ☒ Bestimme mithilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der wie folgt definierten Folgen:

$$(1) a_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 1}$$

$$(2) b_n = \frac{(n+1)^2}{5n^2}$$

$$(3) c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$$

- (b) ☒ Beweise den Grenzwertsatz für Summen. Schreibe dazu zunächst die Voraussetzungen mithilfe der Definition des Grenzwertes präzise auf. Nutze anschließend die sogenannte *Dreiecksungleichung* $|a + b| \leq |a| + |b|$ für reelle Zahlen a und b , um zu zeigen, dass der Term $|a_n + b_n - a + b|$ kleiner wird als $2 \cdot \varepsilon > 0$, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt wurde. Warum genügt die Abschätzung schon?

8 Eine Wurzelfolge

Die Folge (a_n) sei durch die Rekursion $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, $a_0 = 1$ gegeben.

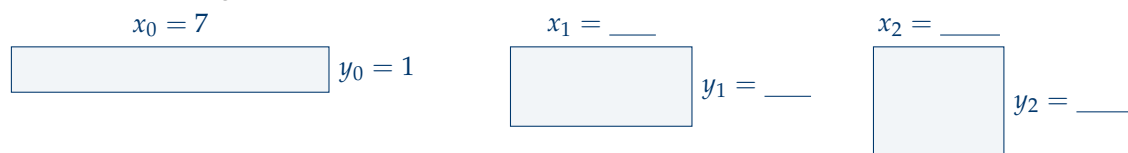
- (a) ☐ Skizziere einige Werte von (a_n) graphisch und vermute den Grenzwert der Folge.
- (b) ☒ Zeige per vollständiger Induktion, dass $a_n = 2^{1 - (\frac{1}{2})^n}$ eine explizite Darstellung der Folge ist und begründe damit ihren Grenzwert.

9 Das Heron-Verfahren

Das Heron-Verfahren ist ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel einer reellen Zahl $a > 0$. Dabei überführt man ein Rechteck mit den Seitenlängen a und 1 schrittweise in ein flächengleiches Quadrat. Dessen Seitenlänge ist dann $\sqrt{a}$.

In jedem Schritt wählt man als längere Seite den Mittelwert der beiden vorherigen Seiten und passt die andere Seite so an, dass der Flächeninhalt a erhalten bleibt.

- (a) ■ Mithilfe des Heron-Verfahrens soll $\sqrt{7}$ approximiert werden. Ergänze die Seitenlängen in der Abbildung.



- (b) ■ Berechne $\sqrt{7} = 2.645 \dots$ auf drei Nachkommastellen genau. Stelle dann eine allgemeine Rekursionsformel für die Folge (x_n) der Seitenlängen im Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$ auf.

$$x_0 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad x_{n+1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- (c) ■ Beweise, dass die Heron-Folge (x_n) gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, also dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ gilt.
- Zeige, dass (x_n) durch $\sqrt{a}$ von unten beschränkt ist, also $x_n \geq \sqrt{a}$ bzw. $x_n^2 - a \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
 - Weise nach, dass (x_n) monoton fallend ist, also $x_n \leq x_{n-1}$ bzw. $x_n - x_{n-1} \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
 - Aus (i) und (ii) folgt nach dem sogenannten *Monotoniekriterium*, dass die Folge (x_n) gegen einen Grenzwert x konvergiert. Beweise nun mithilfe der Grenzwertsätze, dass tatsächlich $x = \sqrt{a}$ ist.