



1 Koffeinspiegel

Ein Lehrer muss einen großen Stapel Klausuren korrigieren und trinkt eine große Tasse Kaffee, die 200 mg Koffein enthält. Nach jeder Stunde trinkt er eine kleinere Tasse Kaffee, die nur 100 mg Koffein enthält. Sein 80 kg schwerer Körper baut in einer Stunde 15% des Koffeins wieder ab.

- Wie viel mg Koffein befindet sich nach drei Stunden, also unmittelbar nach der vierten Tasse Kaffee, im Körper des Lehrers?
- Stelle einen Term auf, mit dem man die Koffeindosis nach n Stunden direkt bestimmen kann, ohne zuvor die vorherigen Dosen berechnen zu müssen.
- Ab einer Konzentration von 10 mg pro kg Körpergewicht kann Koffein Unwohlsein auslösen. Skizziere die Entwicklung der Koffeindosis in einem Diagramm und beurteile, inwiefern der Lehrer sich darüber Sorgen machen muss.



Zahlenfolgen

Eine (reelle) *Zahlenfolge* (a_n) ordnet jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ einen reellen Wert $a_n \in \mathbb{R}$ zu. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ wird *Index* genannt.



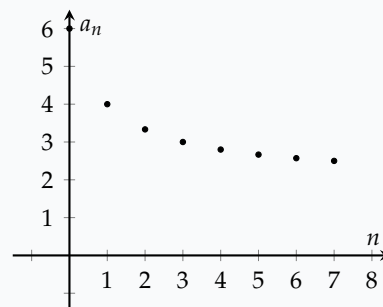
Explizite Festlegung

Das n -te Folgenglied a_n ist durch eine Formel in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$ direkt festgelegt.

↪ Beispiel:

$$a_n = \frac{4}{n+1} + 2$$

n	a_n
0	6
1	4
2	$3, \bar{3}$
3	3
4	$2,8$
...	...



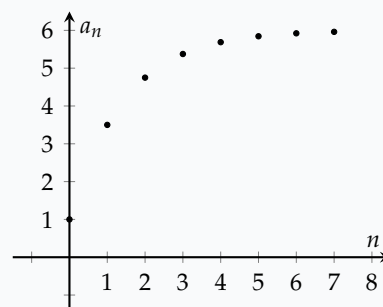
Rekursive Festlegung

Das n -te Folgenglied kann aus dem vorhergehenden Folgenglied mithilfe einer Rekursionsformel berechnet werden. Ein Startwert ist vorgegeben.

↪ Beispiel:

$$a_0 = 1, \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 3$$

n	a_n
0	1
1	$3,5$
2	$4,75$
3	$5,375$
4	$5,6875$
...	...



2 Je drei gehören zusammen

□ Zu jeder angefangenen Folge gehört jeweils eine der aufgeführten expliziten und rekursiven Formeln. Ordne einander zu. Gib bei der Rekursionsformel auch jeweils den Startwert a_0 an.

Folgenglieder	Explizite Formel	Rekursionsformel
(1) 1, 3, 6, 10, ...	(a) $a_n = 2^{n-1}$	(A) $a_n = 0,9 \cdot a_{n-1}$
(2) 100; 90; 81; 72,9; ...	(b) $a_n = 2^n - 1$	(B) $a_n = a_{n-1} + n$
(3) 1, 2, 4, 8, ...	(c) $a_n = \frac{1}{2} \cdot n(n+1)$	(C) $a_n = 0,5 \cdot a_{n-1}$
(4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$	(d) $a_n = 100 \cdot 0,9^{n-1}$	(D) $a_n = 2a_{n-1}$
(5) 1, 3, 7, 15, ...	(e) $a_n = 2^{1-n}$	(E) $a_n = 2a_{n-1} + 1$

3 Wald

Die beiden folgenden Prozesse sollen durch Folgen beschrieben werden.

(1) In einem kleinen Wald stehen 1000 Bäume. Jedes Jahr werden 30 neue Bäume gepflanzt.

(2) In dem Wald gibt es 100 Borkenkäfer. Jedes Jahr kommen 30% hinzu.

- (a) □ Ermittle jeweils eine explizite und eine rekursive Darstellung.
 (b) □ Beschreibe und vergleiche die Entwicklung der Werte. Skizziere die Entwicklungen auch graphisch. Nach wie vielen Jahren gibt es mehr Borkenkäfer als Bäume?



Arithmetische und geometrische Folgen

Zwei spezielle Typen von Folgen treten in vielen Situationen auf.

	Arithmetische Folgen	Geometrische Folgen
Rekursive Darstellung	$a_0 = a$ $a_n = a_{n-1} + d$	$a_0 = a$ $a_n = q \cdot a_{n-1}$
Explizite Darstellung	$a_n = a + n \cdot d$	$a_n = a \cdot q^n$
Charakterisierung	Die Differenz benachbarter Folgenglieder ist konstant: $a_n - a_{n-1} = d$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$	Der Quotient benachbarter Folgenglieder ist konstant: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
Wachstum	linear	exponentiell

4 Der Folgendetektiv

- (a) □ Bestimme a_7 und a_{10} für eine arithmetische Folge mit
 (1) $a_0 = 2, a_4 = 14$ (2) $a_4 = 6, a_6 = 18$ (3) $a_3 = -6, a_6 = 8$
 (b) □ Bestimme a_6 und a_8 für eine geometrische Folge mit
 (1) $a_0 = 2, a_4 = 162$ (2) $a_2 = 1, a_4 = \frac{1}{4}$ (3) $a_1 = \frac{9}{32}, a_4 = \frac{2}{3}$

5 Eine historische und eine zeitgenössische Aufgabe

- (a) ■ Babylonien (2000–200 v. Chr.):
 100 gleiche Goldstücke sollen so unter 10 Brüdern verteilt werden, dass sich vom jüngsten zum ältesten Bruder die Beträge in arithmetischer Folge vermehren. Dabei soll der 8. Bruder 15 Goldstücke erhalten.
 (b) ■ Känguru der Mathematik (2025):
 Die drei Zahlen $\sqrt[9]{7}$, $\sqrt[12]{7}$ und $\sqrt[5]{7}$ sind unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente einer geometrischen Folge. Dann ist das nächste Element dieser Folge

- (A) $\sqrt[9]{7}$ (B) $\sqrt[12]{7}$ (C) $\sqrt[5]{7}$ (D) $\sqrt[10]{7}$ (E) 1



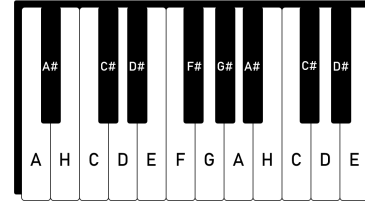


6 Gruppenpuzzle: Arithmetische Folgen höherer Ordnung

Bildet Stammgruppen von 4 Personen. Teilt euch in zwei Expertenteams A und B und bearbeitet jeweils eure Aufgabenteile. Berichtet euch anschließend gegenseitig von euren Erkenntnissen und formuliert die genau-dann-wenn-Aussage, von der ihr in den Expertenteams jeweils eine Richtung bewiesen habt.

7 Geometrische Folgen in der Musik

Eine Oktave ist ein Tonhöhenintervall, bei dem die Frequenz des höheren Tons doppelt so hoch ist wie die des niedrigeren Tons. Bei der *gleichstufigen Stimmung* wird eine Oktave in 12 gleich große Teilintervalle, die Halbtöne, zerlegt. Die Frequenz jedes Tons ist dabei um den gleichen Faktor höher als die seines Vorgängers. Der tiefste Ton auf einer Klaviatur mit 88 Tasten ist ein A_2 mit der Frequenz 27,5 Hz.



- Bestimme eine rekursive und eine explizite Darstellung der Folge, deren n -tes Glied die Frequenz des n -ten Tons in Hz angibt. Ermittle damit die Frequenz des höchsten Tons.
- Bei der *reinen Stimmung* soll die Quinte (7 Halbtonschritte) ein Frequenzverhältnis von 3 : 2 haben. Vergleichen Sie mit dem Verhältnis in gleichstufiger Stimmung. Hört man den Unterschied bei der Quinte, ausgehend vom Kammerton a' mit 440 Hz?

8 Woher die Namen kommen

□ Rechne nach:

- Jedes Folgenglied einer arithmetischen Folge ist das arithmetische Mittel von vorherigem und nachfolgendem Folgenglied.
- Jedes Folgenglied einer geometrischen Folge ist das geometrische Mittel von vorherigem und nachfolgendem Folgenglied.

Mittelwerte
von a und b :
 $m_{\text{arith}} = \frac{a+b}{2}$
 $m_{\text{geom}} = \sqrt{a \cdot b}$

9 Rekursive Funktion explizit machen

■ Eine Funktion f sei durch die Rekursion $f(n+1) = f(n) + n$ und den Startwert $f(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Ermittle einen expliziten Funktionsterm für f .

Tipp: Betrachte die ersten Folgenglieder und stelle eine Vermutung an, um welche Art von Funktion es sich handeln könnte.