Folgen – Grenzwerte – Reihen

1 $0,\overline{9} \stackrel{?}{=} 1$

Ein Brautpaar diskutiert:

Das Gleichheitszeichen kann nicht zutreffen – egal, wie viele Neunen ich hinschreibe, es bleibt immer ein kleiner Unterschied d zu 1.
Bei 10 Neunen gilt $d = 1 - 0{,}9999999999 = 0{,}0000000001 = \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$,
bei 100 Neunen gilt $d = 1 - 0{,}999\ldots999 = 0{,}000\ldots001 = \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$
und so weiter.

Nein, das Gleichheitszeichen ist korrekt.
Du behauptest also, dass es auf der Zahlengeraden zwischen $0,\overline{9}$ und 1 einen positiven Abstand d gibt. Dann gib mir einen solchen Abstand vor.

Zum Beispiel $d = \left(\frac{1}{10}\right)^{1000}$. Dann schreibe ich 1001 Neunen hinter den Dezimalpunkt und damit ist der Abstand unterschritten. Bei $d = \left(\frac{1}{10}\right)^{10000}$ schreibe ich eben 10001 Neunen hinter den Dezimalpunkt und damit ist auch dieser Abstand unterschritten.

Egal, welchen noch so kleinen Abstand d du mir vorgibst, ich kann immer ein Teilstück von $0,\overline{9}$ angeben, dessen Abstand zu 1 kleiner ist als d.

Welche Argumentation überzeugt euch mehr?

2 Note verbessern

Caecilia hat in der letzten Lateinarbeit leider eine 5 geschrieben. Zum Glück kann sie ihre Note aufbessern, indem sie beliebig viele Referate hält, die bei ihr immer mit einer 2 benotet werden. Ihre Zeugnisnote wird schließlich der (gerundete) Mittelwert aller Noten sein.

(a) Gib die explizite Darstellung der Folge (a_n) an, wobei a_n Caecilias Abschlussnote nach n gehaltenen Referaten ist.

(b) Ihr Lateinlehrer rundet die Zeugnisnote auf eine 2, wenn der Mittelwerts weniger als $0,5$ von 2 abweicht. Wie viele Referate muss Caecilia halten, um eine 2 auf dem Zeugnis zu bekommen?

(c) In Mathe steht Caecilia vor der gleichen Situation. Aber der Mathelehrer rundet nur dann auf eine glatte 2 ab, wenn der Mittelwert erst in der zweiten Nachkommstelle von $2,00$ abweicht. Wie viele Referate muss sie in Mathe halten, um auf eine 2 zu kommen?

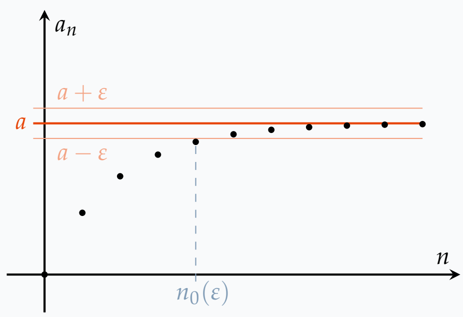
Der Grenzwert einer Folge

Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* der Folge (a_n), falls es für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ gibt, nach dem alle Folgenglieder a_n weniger als ε von a entfernt sind.

Falls die Folge (a_n) den Grenzwert a hat, schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und sagt:

- „Der Limes von (a_n) für n gegen unendlich ist a."
- „Die Folge (a_n) *konvergiert* gegen den Grenzwert a."

Falls eine Folge keinen Grenzwert besitzt, *divergiert* die Folge.



Limes (Lat. „Grenze")

Achtung: Nicht immer ist $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

3 Grenzwerte bestimmen und begründen

Es seien die die folgenden Folgen gegeben:

(1) $a_n = 3 + \frac{4}{n}$ (2) $b_n = \sqrt{n}$ (3) $c_n = \frac{n^2-4}{2n^2}$ (4) $d_n = 2 + (-1)^n$

(a) □ Untersuche die Folgen auf Konvergenz und vermute gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) ⬓ Weise nun für die konvergenten Folgen rechnerisch nach, dass sie gegen den vermuteten Grenzwert konvergieren. Ermittle dafür zunächst für den konkreten Wert $\varepsilon = 0{,}01$ und dann für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ den Wert $n_0(\varepsilon)$, ab dem die Folgenglieder alle einen kleineren Abstand als ε vom Grenzwert haben.

(c) ■ Wie lässt sich für die divergenten Folgen beweisen, dass sie divergieren?

4 Wo steckt der Fehler?

Es gilt $\frac{1}{10n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0{,}05$.
Denn wählt man $d = 0{,}1$, ist der Abstand aller Werte von $0{,}05$ kleiner als d.

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = 1$.
Denn in jedem noch so schmalen Streifen um 1 liegen unendlich viele Werte.

5 Nullfolgen

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*.

(a) □ Weise mithilfe der ε-Definition nach, dass die *harmonische Folge* (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist.

(b) ⬓ Beweise mithilfe von (a), dass auch die Folge (b_n) mit $b_n = \frac{n!}{n^n}$ eine Nullfolge ist.

6 Kleine, aber feine Unterschiede

⬓ Die Folge (a_n) sei eine Nullfolge, d. h. es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Welche der folgenden Beschreibungen sind besonders präzise, welche weisen Ungenauigkeiten auf?

(1) Die Folgenglieder a_n kommen mit wachsendem n der 0 immer näher.

(2) Die Folgenglieder a_n kommen mit wachsendem n der 0 beliebig nahe.

(3) Die Folgenglieder a_n kommen mit wachsendem n der 0 immer näher, ohne sie zu erreichen.

(4) Die Folgenglieder a_n streben gegen 0 für n gegen unendlich.

Stellt eine Rangfolge auf und begründet eure Ergebnisse in der Klasse.

7 Grenzwerte von arithmetischen und geometrischen Folgen

(a) □ Begründe kurz, dass eine arithmetische Folge (a_n) mit $a_n = a + n \cdot d$ nicht konvergent sein kann.

(b) ⬓ Untersuche die geometrischen Folge (a_n) mit $a_n = a \cdot q^n$ für die angegebenen Werte auf Konvergenz. Was passiert bei für $q = 1$ und $q = -1$? Formuliere deine Ergebnisse als Satz. Findest du auch eine allgemeine Begründung?

	a	d
(1)	2	$\frac{3}{4}$
(2)	1	-2
(3)	-4	$-\frac{1}{3}$
(4)	$0{,}1$	$1{,}05$

! **Grenzwertsätze für Folgen**

Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten:

Faktorregel:
$\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = \lambda \cdot a$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

Produktregel:
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = a \cdot b$

Summenregel:
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = a + b$

Quotientenregel:
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) : \lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = \frac{a}{b}$,
falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n.

8 Grenzwerte mit Grenzwertsätzen

(a) Bestimme mithilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der wie folgt definierten Folgen:

(1) $a_n = \frac{n^2-2n+1}{2n^2+1}$ (2) $b_n = \frac{(n+1)^2}{5n^2}$ (3) $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

(b) Beweise den Grenzwertsatz für Summen. Schreibe dazu zunächst die Voraussetzungen mithilfe der Definition des Grenzwertes präzise auf. Nutze anschließend die sogenannte *Dreiecksungleichung* $|a+b| \leq |a| + |b|$ für reelle Zahlen a und b, um zu zeigen, dass der Term $|a_n + b_n - a + b|$ kleiner wird als $2 \cdot \varepsilon > 0$, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt wurde. Warum genügt die Abschätzung gegen $2 \cdot \varepsilon$ schon?

9 Eine Wurzelfolge

Die Folge (a_n) sei durch die Rekursion $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, $a_0 = 1$ gegeben.

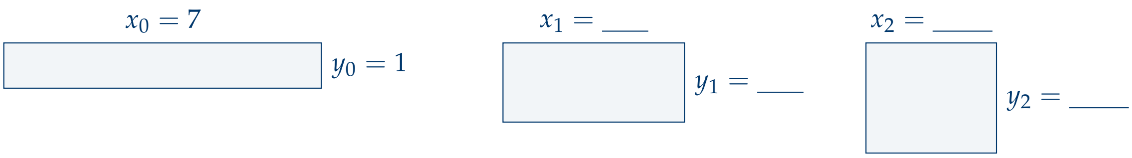
(a) Skizziere einige Werte von (a_n) graphisch und vermute den Grenzwert der Folge.

(b) Zeige per vollständiger Induktion, dass $a_n = 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ eine explizite Darstellung der Folge ist und begründe damit ihren Grenzwert.

10 Das Heron-Verfahren

Das Heron-Verfahren ist ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel einer reellen Zahl $a > 0$. Dabei überführt man ein Rechteck mit den Seitenlängen a und 1 schrittweise in ein flächengleiches Quadrat. Dessen Seitenlänge ist dann $\sqrt{a}$.
In jedem Schritt wählt man als längere Seite den Mittelwert der beiden vorherigen Seiten und passt die andere Seite so an, dass der Flächeninhalt a erhalten bleibt.

(a) Mithilfe des Heron-Verfahrens soll $\sqrt{7}$ approximiert werden. Ergänze die Seitenlängen in der Abbildung.



(b) Berechne $\sqrt{7} = 2.645\ldots$ auf drei Nachkommastellen genau. Stelle dann eine allgemeine Rekursionsformel für die Folge (x_n) der Seitenlängen im Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$ auf.

$x_0 =$, $x_{n+1} =$

(c) Beweise, dass die Heron-Folge (x_n) gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, also dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ gilt.

(i) Zeige, dass (x_n) durch $\sqrt{a}$ *von unten beschränkt* ist, also $x_n \geq \sqrt{a}$ bzw. $x_n^2 - a \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(ii) Weise nach, dass (x_n) *monoton fallend* ist, also $x_n \leq x_{n-1}$ bzw. $x_n - x_{n-1} \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt nach dem sogenannten *Monotoniekriterium*, dass die Folge (x_n) gegen einen Grenzwert x konvergiert. Beweise nun mithilfe der Grenzwertsätze, dass tatsächlich $x = \sqrt{a}$ ist.