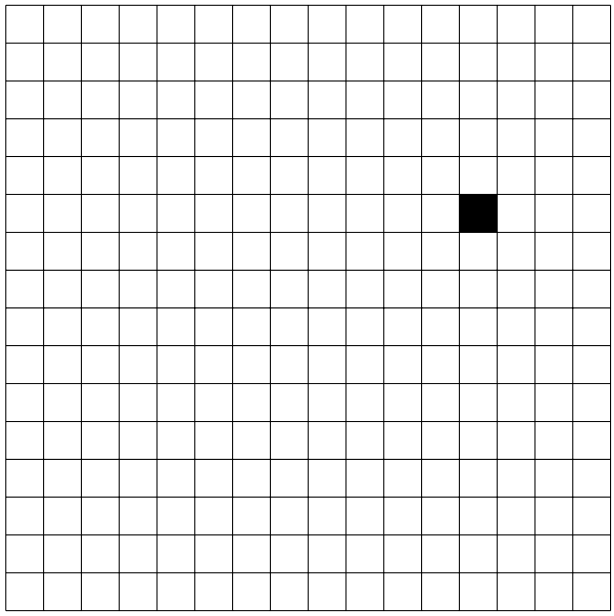
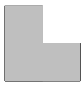
MSG-Zirkel 8b | 07. September 2023

Vollständige Induktion

1. Passt's?



Der Frachtraum eines Raumfrachters besteht aus 16×16 Feldern und soll mit kleinen L-förmigen-Raumgleitern gefüllt werden, die jeweils drei Felder belegen.



Auf einem der Felder des Frachtraums steht jedoch ein Container.

(a) Kann der Frachtraum lückenlos mit Raumgleitern gefüllt werden?

(b) Der Container ist in ein anderes Feld gerutscht. Funktioniert die Beladung immer noch?

Hinweis: Wie sähe es bei einem 8×8-, 4×4- *bzw.* 2×2-*Frachtraum aus?*

2. Das Induktionsprinzip

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ folgen dem Prinzip der *vollständigen Induktion*:

> **Prinzip der vollständigen Induktion**
>
> Sei M eine Menge natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllt:
>
> **(1)** Es ist $1 \in M$.
>
> **(+1)** Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Ist n in M, dann ist auch $n+1$ in M.
>
> Dann ist $M = \mathbb{N}$, d. h. M enthält alle natürlichen Zahlen.

Dieses Prinzip können wir uns zunutze machen, wenn wir Aussagen $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ beweisen möchten.

Beispiel.

Wir möchten beweisen, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Aussage gilt:

$$A(n)\text{: } n^2 + n \text{ ist durch 2 teilbar.}$$

Induktionsanfang. Es gilt $A(1)$, denn: $1^2 + 1 = 2$ ist durch 2 teilbar.

Induktionsschritt. Es gilt für alle $n \geq 1 : A(n) \Rightarrow A(n+1)$, denn: Wenn $A(n)$ gilt, d. h. $n^2 + n$ durch 2 teilbar ist, dann gilt auch $A(n+1)$, d. h. $(n+1)^2 + (n+1)$ ist durch 2 teilbar, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2(n+1).$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ also für *alle* $n \geq 1$.

(a) Beweise die folgenden Aussagen jeweils mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:
   (i) $A(n)$: Die Zahl $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar.
   (ii) $A(n)$: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

   Nutze dabei die Struktur und Notation aus dem Beispiel.

(b) Beweise, dass $n^3 > 2n + 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.
   Achte darauf, die Induktionsprozedur sauber aufzuschreiben.

(c) Für welche natürlichen Zahlen gilt $n! > n^2$?
   Beweise deine Behauptung.

3. Überzeugende Induktion?

Oft wird das Prinzip der vollständigen Induktion mit einer Reihe umfallender Dominosteine veranschaulicht:

(a) Erkläre diese Veranschaulichung.

(b) Was genau geht in den beiden folgenden Beispielen schief?

Koffer packen. *Behauptung*: In einen Koffer passen beliebig viele Paar Socken. *Beweis* durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Ein Paar passt in einen leeren Koffer.

Induktionsschluss: In einem Koffer seien n Paar Socken. *Ein* Paar passt zur Not immer noch hinein. Also sind nun $n + 1$ Paare in dem Koffer. Ok!

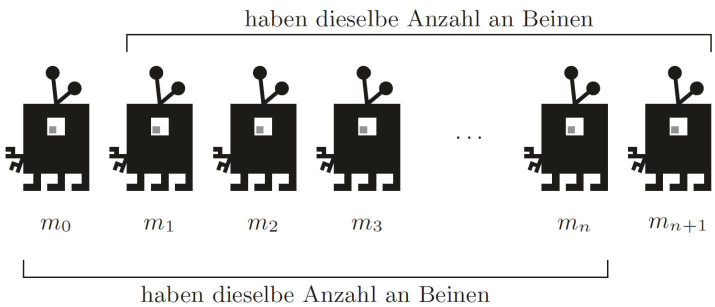
Marsmännchen. Ohne jemals eines gesehen zu haben, beweisen wir induktiv: *Alle Marsmännchen haben dieselbe Anzahl an Beinen.* Es gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$:

$A(n)$: In einer Gruppe von n Marsmännchen haben alle dieselbe Anzahl an Beinen.

Induktionsanfang: Offenbar gilt $A(1)$, denn in einer Gruppe von einem Marsmännchen haben alle dieselbe Anzahl an Beinen.

Induktionsschritt: Wir zeigen $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$, d. h. wenn in einer Gruppe von n alle dieselbe Anzahl an Beinen haben, dann auch in einer Gruppe von $n + 1$.

Dazu teilen wir $n + 1$ Marsmännchen zweimal in eine n-Gruppe und ein übriges auf:



In beiden n-Gruppen haben alle Marsmännchen nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Anzahl an Beinen. Und weil einige in beiden Gruppen sind, müssen letzlich alle $n + 1$ Marsmännchen dieselbe Anzahl an Beinen haben.