MSG-Zirkel 8b | 21. September 2023

Die Türme von Hanoi (und einige Summen)

1. Die Türme von Hanoi

Einer alten Legende zufolge gibt es einen geheimen Tempel in Hanoi, in dessen Halle drei Bambuspfähle stehen. Auf den ersten Pfahl aufgesteckt sind 64 goldene Scheiben in aufsteigender Größe.

Die Mönche des Tempels haben die Aufgabe, diesen Turm ab- und auf dem dritten Pfahl wieder aufzubauen. Allerdings müssen sie zwei Regeln beachten:

(1) Es darf immer nur eine Scheibe gleichzeitig bewegt werden, und zwar nur von einem der drei Pfähle zu einem anderen.

(2) Es darf niemals eine größere Scheibe auf eine kleinere abgelegt werden.

In dem Moment, heißt es, da die Mönche den gesamten Turm versetzt haben, geht das Universum zugrunde.

Wie alt wird das Universum nach dieser Legende?

(a) Löst das Rätsel für $n = 1, 2, 3, \ldots, 6$ Scheiben, d. h. versetze einen n-Scheiben-Turm unter Einhaltung der Regeln vom linken auf den rechten Pfahl.
Was fällt euch auf?

(b) Wie viele Züge braucht man *bei optimaler Vorgehensweise* jeweils, um einen Turm mit $n = 1, 2, 3, \ldots, 6$ Scheiben zu versetzen?
Experimentiert mit wenigen Scheiben, stellt eine Vermutung auf und überprüft eure Vermutung dann mit vielen Scheiben.

(c) Geht sicher, dass eure Vermutung auch für mehr als $n = 6$ Scheiben zutrifft, indem ihr sie *induktiv* beweist.

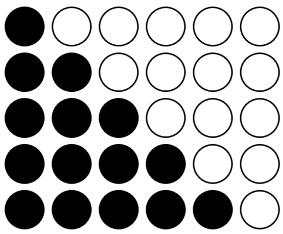
(d) Wie lange würde es wohl dauern, einen 64-Scheiben-Turm zu versetzen?

2. Summenformeln – eine Standardanwendung der Induktion

Wir erinnern uns an den kleinen Gauß und seine Summenformel für die ersten n Zahlen:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

(a) Wie lässt sich diese Formel mithilfe der folgenden Denkstützen herleiten?



$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \ldots & n+1 & n+1 \end{array}$$

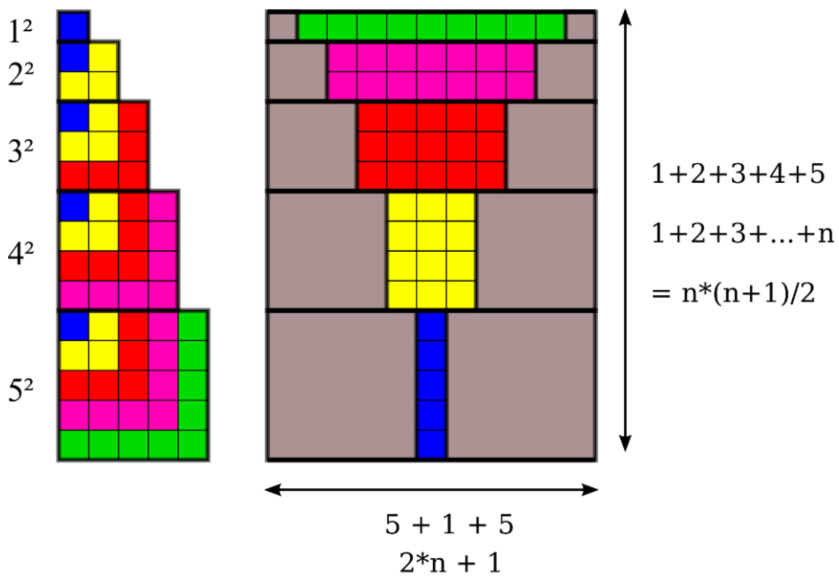
Summenformeln wie diese können in der Regel auch induktiv bewiesen werden.

(b) Beweise durch vollständige Induktion die Gaußsche Summenformel für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Formuliere die Induktionsprozedur sorgfältig.

Auch für die Summe der ersten n *Quadratzahlen*,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2,$$

gibt es eine Summenformel. Die folgende Abbildung veranschaulicht die Summe der ersten $n = 5$ Quadratzahlen:



(c) Stelle mithilfe dieser Abbildung eine Vermutung für eine allgemeine Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen auf.
Hinweis: Die gesuchte Summenformel besteht im Zähler aus drei Faktoren.

(d) Beweise deine Vermutung induktiv für alle natürlichen Zahlen.

Christoph Lieben c.lieben@.hu-berlin.de