MSG-Zirkel 8b | 09. November 2023

Spielerische Induktion

1. Nimm 1!

Eine bestimmte Anzahl von Steinen liegt ausgebreitet. Zwei Spieler nehmen abwechselnd immer genau einen Stein weg. Der Spieler, der den letzten Stein wegnimmt, verliert.

Vermutung: Der Startspieler gewinnt, wenn eine gerade Anzahl Steine ausliegt.

(a) Simuliert das Spiel mit 1,2,3 und 4 Steinen, um diese Vermutung zu überprüfen.

(b) Angenommen, die Vermutung stimmt tatsächlich für eine bestimmte gerade Zahl.

Begründet, warum die Vermutung dann auch für die nächstgrößere gerade Zahl gilt. *Hinweis: Überlegt, wie man gerade Zahlen als mathematischen Term darstellen kann.*

(c) Begründet auf die gleiche Weise, dass der Startspieler bei einer ungeraden Anzahl von Steinen immer verliert.

2. Nimm 1 oder 2!

Wieder liegt eine bestimmte Anzahl von Steinen ausgebreitet. Die zwei Spieler haben nun aber jeweils die Wahl, ob sie einen oder zwei Steine wegnehmen. Wieder verliert der Spieler, der den letzten Stein wegnehmen muss.

(a) Spielt das Spiel über insgesamt 20 Spielrunden in der von der Tabelle vorgegebenen Reihenfolge und notiert dabei jeweils, welcher Spieler das Spiel gewonnen hat.

Spielrunde	Steine	Startspieler	Sieger
1	1	A	
2		B	
3	2	B	
4		A	
5	3	A	
6		B	
7	4	B	
8		A	
9	5	A	
10		B	
11	6	B	
12		A	
13	7	A	
14		B	
15	8	B	
16		A	
17	9	A	
18		B	
19	10	B	
20		A	

(b) Schreibt aus Sicht des Startspielers eine Gewinnstrategie für ein Spiel mit $1, 2, \ldots, 10$ Steinen auf. Wie oft sollte der Startspieler mindestens gewinnen?

(c) Angenommen, beide Spieler haben die Gewinnstrategie durchschaut: Wer gewinnt bei 49, 50, 100 und 105 Steinen?
Hinweis: Sucht nach einem Muster für die Steinanzahl, bei denen der Startspieler verliert.

(d) Beweist eure Vermutung nach dem Beweisprinzip aus Aufgabe 1.

3. (Wiederholung:) Das Prinzip der vollständigen Induktion

Die *vollständige Induktion* ist ein Beweisverfahren, mit dem eine Aussage für alle natürlichen Zahlen ab einem bestimmten Startwert bewiesen werden kann.

Prinzip der vollständigen Induktion

Der Beweis, dass die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt, erfolgt in zwei Schritten:

(IA) Im **Induktionsanfang** wird die Gültigkeit der Aussage $A(n_0)$ gezeigt, d. h., dass die Aussage für eine Startzahl n_0 stimmt.

„Die Aussage gilt für einen Startwert.“

(IS) Im **Induktionsschritt** wird dann für $n \geq n_0$ gezeigt, dass die Gültigkeit der Aussage $A(n+1)$ aus der Gültigkeit der Aussage $A(n)$ folgt.

„Gilt die Aussage für eine beliebige Zahl, so gilt sie auch für deren Nachfolger.“

Ausgehend vom Beweis für den Startwert erledigt der Induktionsschritt den Beweis für alle natürlichen Zahlen oberhalb des Startwertes.

Beispiel.

Wir möchten beweisen, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Aussage gilt:

$$A(n)\text{: } n^2 + n \text{ ist durch 2 teilbar.}$$

(IA) Setze $n_0 := 1$. Dann ist $(1)^2 + (1) = 2$ tatsächlich durch 2 teilbar.
Die Aussage stimmt also für $n_0 = 1$, d. h. es gilt $A(1)$.

(IS) Wir möchten zeigen: Für alle $n \geq n_0 = 1$ folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$.

Angenommen, es gilt $A(n)$, d. h. $n^2 + n$ ist durch 2 teilbar. Nun überprüfen wir, ob dann auch $A(n+1)$ gilt. Setze also $n := n+1$ in der Aussage und forme um, bis der Term $n^2 + n$ zu erkennen ist:

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (n^2 + n) + 2(n+1).$$

Der erste Teil der Summe ist wegen der Gültigkeit von $A(n)$ durch 2 teilbar. Und der zweite Teil der Summe ist ein Produkt von 2 und einer anderen natürlichen Zahl, also auch durch 2 teilbar. Damit ist die ganze Summe durch 2 teilbar. Es gilt also tatsächlich $A(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ also für *alle* $n \geq 1$.

Aufgaben:

(a) Beweise die folgenden Aussagen jeweils mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n)\text{: Die Zahl } n^3 + 2n \text{ ist durch 3 teilbar.}$$

Nutze dabei die Struktur und Notation aus dem Beispiel.

(b) Beweise, dass $n^3 > 2n + 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.
Achte darauf, die Induktionsprozedur sauber aufzuschreiben.

(c) Für welche natürlichen Zahlen gilt $n! > n^2$?
Beweise deine Behauptung.