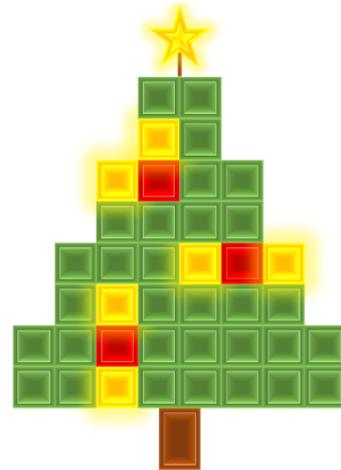


Es weihnachtet sehr

1. Am Weihnachtsbaume die Lichter brennen

Der Weihnachtsmann hat sich in diesem Jahr einen Weihnachtsbaum mit ganz besonderer Beleuchtung ausgesucht. Der Weihnachtsbaum ist in insgesamt 40 kleine Quadrate eingeteilt und in jedes dieser Quadrate kann leuchten.

Das Besondere an dem Baum: Die Lichter zünden sich gegenseitig an. Ein noch nicht leuchtendes Licht wird angezündet, wenn schon mindestens zwei waagrecht oder senkrecht benachbarte Felder leuchten. Die neu angezündeten Lichter können dann selbst weitere Lichter anstecken. Ein Licht kann aber nicht über diagonal benachbarte Felder angezündet werden.



Wie viele Lichter muss man am Anfang mindestens anzünden, damit am Ende der ganze Baum leuchtet?

Bonus: Finde eine Anfangsbeleuchtung, die mit so wenigen Schritten wie möglich den ganzen Baum zum leuchten bringt.

2. Geschenke wiegen

Weil die Geschenke jedes Jahr teurer werden, muss der Weihnachtsmann an anderer Stelle sparen. Seine Wichtel wiegen die verpackten Geschenke, die alle ein ganzzahliges Gewicht zwischen 1 kg und 40 kg haben, vor dem Abtransport mithilfe einer Balkenwaage ab. Zum Abwiegen stehen ihnen 40 Gewichte, nämlich 1 kg, 2 kg, ..., 39 kg und 40 kg, zur Verfügung. Zumindst bis jetzt, denn der Weihnachtsmann ist sich sicher: „Eigentlich brauchen wir dafür doch viel weniger Gewichte!“



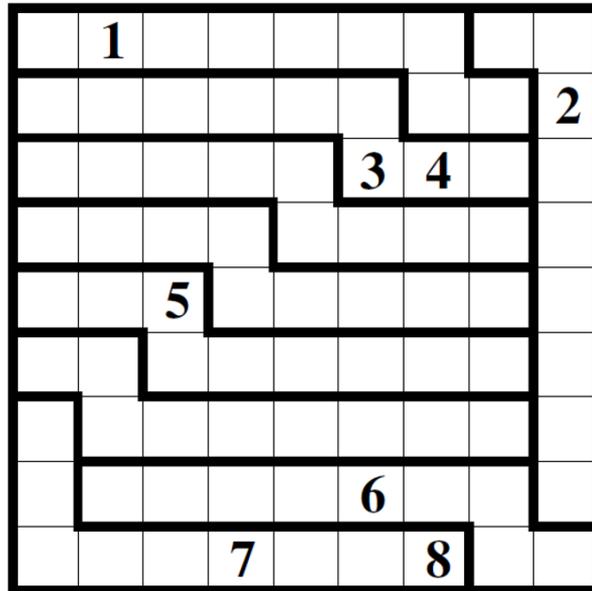
Auf wie viele (und welche) Gewichte lässt sich der Vorrat reduzieren, so dass immer noch jedes ganzzahlige Gewicht von 1–40 kg abgewogen werden kann?

Tipp: Man benötigt nur die Potenzen einer gewissen Zahl...

Zur Kontrolle: Es genügen $5 \cdot \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ Gewichte.

3. Kudosu

Kudosu ist eine Variante des bekannten Sudoku-Rätsels. Die 81 Zellen im folgenden 9×9 -Schema sollen mit den Ziffern 1, ..., 9 gefüllt werden, sodass jede Zeile und jede Spalte jede der neun Ziffern genau einmal enthält. Außerdem soll auch jedes der neun eingezeichneten Gebiete jede der neun Ziffern genau einmal enthalten.



Löse das Kudosu.

4. Math Christmas

$$\begin{aligned} \text{snowman} + \text{snowman} &= 8 \\ \text{Santa} + \text{Santa} - \text{snowman} &= 10 \\ \text{tree} \times \text{tree} &= \text{tree} \\ \text{Santa} \times \text{reindeer} - \text{tree} &= 16 \\ \text{tree} + (\text{snowman}) \times \sqrt{\text{Santa}} &= ?? \end{aligned}$$