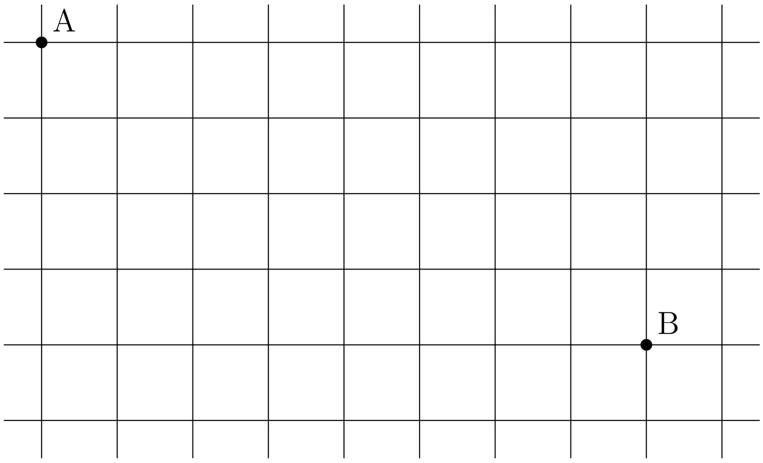
MSG-Zirkel 8b | 16. Mai 2024

Kombinatorisches

1. Taxi-Geometrie

Die Straßen einer Stadt sind gitterförmig angeordnet. Die Taxifahrer der Stadt fahren immer auf *möglichst kurzen* Wegen von ihrem Start- zum Zielpunkt.

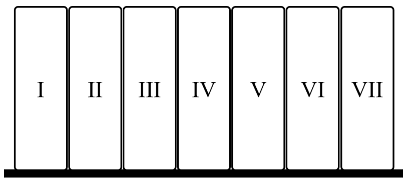


(a) Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann ein Taxifahrer von A nach B fahren?

(b) Beschrifte alle Gitterpunkte des Netzes mit der Anzahl der Wege, die von A dorthin führen. Was fällt dir auf?

2. Bücher

Hermine besitzt alle sieben Bände ihrer Lieblingsbuchreihe.



(a) Auf wie viele Weisen kann sie die Bücher in ihrem Regal nebeneinander anordnen?

Wie viele Möglichkeiten gibt es allgemein, n Objekte anzuordnen?

(b) Hermine möchte vier von ihren sieben Büchern mit in den Urlaub nehmen.
Wie viele Möglichkeiten hat sie, vier aus sieben Büchern auszuwählen?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge von k Objekten aus einer Menge von n Objekten auszuwählen?

Hermines Freund Ron argumentiert:

„Du kannst doch deine sieben Bücher auf 7! viele Weisen nebeneinander anordnen. Dann nimmst du einfach die linken 4 Bücher lässt die restlichen 3 Bücher stehen.

Natürlich gibt es mehrere Reihenfolgen, in denen die gleichen 4 Bücher auf den linken Plätzen stehen, nämlich genau 4! viele. Genauso können die übrigen 3 Bücher auf 3! viele Weisen rechts stehen.

In allen dieser insgesamt $4! \cdot 3!$ Fälle nimmst du die gleichen 4 Bücher mit in den Urlaub. Deshalb zählen wir sie jeweils nur als eine Kombination, indem wir die Gesamtzahl der Anordnungen durch diese Anzahl teilen. Es gibt also

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!}$$

viele Möglichkeiten, 4 aus 7 Büchern auszuwählen.“

(c) Vergleiche Rons Ergebnis mit deinem eigenen Ergebnis aus (b). Hat er Recht?

Stelle nach Rons Argumentation eine Formel für den allgemeinen Fall auf, dass k aus n Objekten ausgewählt werden.

(d) Rechne nach, dass deine allgemeine Lösung aus (b) und die Lösung von Ron aus (c) tatsächlich identisch sind.

Definition:

Es seien n und k natürliche Zahlen. Die Zahl

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} =: \binom{n}{k} \quad \text{(sprich: „}n \text{ über } k\text{ “)}$$

wird *Binomialkoeffizient* genannt.

3. Lotto

Beim Lotto kreuzt man auf seinem Lottoschein 6 der Zahlen von 1 bis 49 an. Bei der Ziehung werden dann aus 49 nummerierten Kugeln 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei...

A: ...6 Richtige zu tippen?

B: ...genau 4 Richtige zu tippen?
Vielleicht hilft Dir die Abbildung rechts weiter.

C: ...*mindestens* 4 Richtige zu tippen?

4 Richtige: