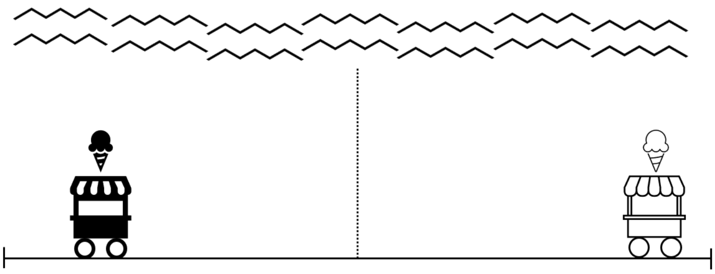
MSG-Zirkel 8b | 25. April 2024

# Einführung in die Spieltheorie II

## 1. Eisverkäufer am Strand

Ein Strand von 10 m Breite und 100 m Länge ist im Osten und Westen durch Felsen begrenzt, im Norden durch das Meer und im Süden durch eine Uferpromenade. An diesem Strand gibt es genau zwei Eisverkäufer mit je einem mobilen Eisverkaufsstand, der aber nur längs der Uferpromenade bewegt werden kann, nicht im Sand. Der Strand ist gleichmäßig mit Badegästen gefüllt. Beide Eisverkäufer bieten das gleiche Eis zum gleichen Preis an. Die Badegäste suchen immer den nächstgelegenen Stand auf.



(a) Beschreibe, wie sich die beiden Eisverkäufer positionieren müssen, damit beide gleich große Einzugsbereiche haben und die Badegäste insgesamt möglichst kurze Wege gehen müssen.

(b) Vermute: Was passiert, wenn die beiden Eisverkäufer ihre Absprache aufgeben und jeweils versuchen, die eigene Position zu optimieren?

## 2. Das Schwarzfahrerspiel

Alice fährt jeden Tag mit derselben Straßenbahn zur Arbeit. Sie kann sich dabei täglich entscheiden, ob sie zahlt oder schwarzfährt. Kontrolleur Bob kann sich unabhängig davon entscheiden, ob er in dieser Straßenbahn kontrolliert oder nicht.

Dieses Spiel halten wir in der folgenden Auszahlungsmatrix fest:

| | | Bob | |
|---|---|---|---|
| | | kontrolliert | kontrolliert nicht |
| Alice | fährt schwarz | $3$<br>$-8$ | $-2$<br>$1$ |
| | zahlt | $-1$<br>$0$ | $0$<br>$-1$ |

(a) Interpretiere die Auszahlungswerte in den vier Fällen.
Welche Überlegungen könnten der Wahl dieser Werten zugrunde liegen?

(b) Untersuche das Spiel auf Nash-Gleichgewichte, d. h. auf Zustände, in denen kein Spieler seine Auszahlung verbessern kann, indem er seine Strategie ändert.

Alice hat beobachtet, dass Bob die Straßenbahn mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{8}$ kontrolliert. Daher ‚erwartet' sie beim Schwarzfahren eine Auszahlung $A_s$ von

$$A_s = \frac{1}{8} \cdot (-8) + \frac{7}{8} \cdot 1 = -\frac{5}{4}.$$

(c) Berechne, welche Auszahlung Alice bei der Strategie „Zahlen" erwarten würde. Welche Strategie ist für Alice die bessere?

Bob erhöht und die Häufigkeit seiner Kontrollen. Die Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$, dass er in Alice' Bahn kontrolliert, steigt daher.

(d) Bestimme die Kontroll-Wahrscheinlichkeit $p$, ab der es sich für Alice nicht mehr lohnt, schwarzzufahren.

Bob möchte seine Kontrollen optimieren. Er weiß allerdings nicht genau, mit welcher Wahrscheinlichkeit $q \in [0, 1]$ Alice schwarzfährt.

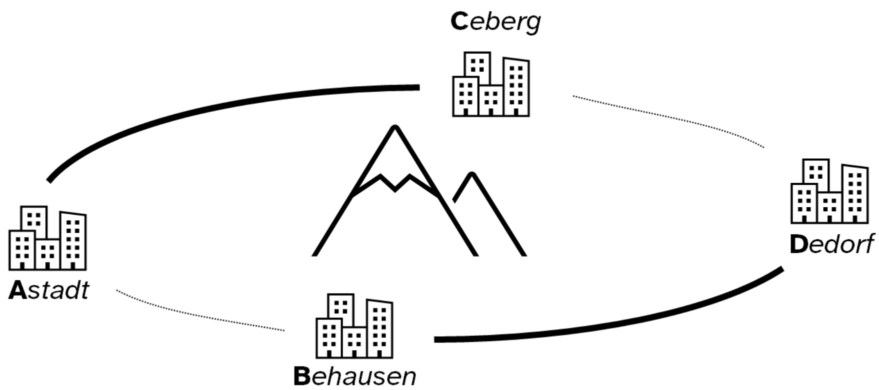
(e) Ermittle, für welche Wahrscheinlichkeiten $q$ seine beiden Strategien jeweils höhere Auszahlungen versprechen.

Wenn Spieler ihre Strategien mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wählen, nutzen sie sogenannte *gemischte Strategien*.

(f) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten müssen Alice und Bob ihre jeweiligen Strategien nutzen, damit sich ein Nash-Gleichgewicht einstellt?

## 3. Verflixte Verkehrsplanung

Täglich pendeln 1 000 Autos von Astadt nach Dedorf. Die Fahrt führt entweder über Behausen oder über Ceberg. Auf den gut ausgebauten Autobahnen zwischen Astadt und Ceberg sowie zwischen Behausen und Dedorf dauert die Fahrt – unabhängig vom Verkehrsaufkommen – 12 Minuten. Die Strecken zwischen Astadt und Behausen sowie zwischen Ceberg und Dedorf führen über Landstraßen. Dort hängt die Fahrzeit vom Verkehrsaufkommen ab und dauert 1 Minute pro 100 dort fahrenden Autos.




(a) Wenn jeder Autofahrer die für ihn schnellste Route wählt, wird sich nach einer gewissen Zeit ein Nash-Gleichgewicht zwischen den beiden Routen einstellen. Berechne, wie lange die gesamte Fahrt dann für jeden einzelnen dauert.

Der Landkreis beschließt den Bau eines modernen Tunnels zwischen Behausen und Ceberg, der die Fahrt zwischen diesen beiden Städten auf nur 1 Minute verkürzt. Dadurch ergeben sich für die Pendler neue Routen.

(b) Bestimme das neue Nash-Gleichgewicht. Wie groß ist die Zeitersparnis der Pendler durch den Bau des Tunnels?