Das Summenzeichen

Mithilfe des *Summenzeichens* Σ („Sigma“) kann man eine Summe mit einer großen Anzahl von Summanden in Kurzform aufschreiben.

Beispiel:
Für die Summe
$$3+6+9+12+15+18+21+24+27+30$$
schreiben wir kurz
$$\sum_{k=1}^{10} 3k.$$
Dabei nimmt der *Laufindex* $k \in \mathbb{Z}$ die Werte von der *unteren Grenze* 1 bis zur *oberen Grenze* 10 an. Und für jeden Wert des Laufindex k erhalten wir den Summanden $3k$.

Übungsaufgaben:

1. Schreibe die folgenden Summen ohne Summenzeichen:
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k$
   (b) $\displaystyle\sum_{j=4}^{7} j$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{4} 2k$
   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$
   (e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} 2$

2. Schreibe die folgenden Summen mit Summenzeichen:
   (a) $3+4+5+6+7+8+9$
   (b) $1+2+\ldots+16+17$
   (c) $1+3+5\ldots+15+17$
   (d) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\ldots+\dfrac{20}{21}$
   (e) $10+5+\dfrac{10}{3}+\dfrac{5}{2}+2+\dfrac{5}{3}+\dfrac{10}{7}$

3. Ergänze die fehlenden Teile der folgenden Gleichungen:

(a) $\sum_{k=6}^{10}(k-1) = \sum_{k=1}$ (b) $1+2+\sum_{k=2}^{n} 2^k = \sum 2^k$ (c) $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \sum a_k$

4. Bestimme den Wert der folgenden Summen bzw. vereinfache so weit wie möglich:

(a) $\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}(n \cdot k^2)$

(b) $\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

(c) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

5. Sind die folgenden Umformungen korrekt? Begründe und korrigiere gegebenenfalls.

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n} j$

(b) $\sum_{k=1}^{n}(n \cdot k) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} k$

(c) $\sum_{k=1}^{n}(n \cdot k) = k \cdot \sum_{k=1}^{n} n$

(d) $\sum_{j=1}^{m} 2j^3 + \sum_{j=m}^{n} 2j^3 = \sum_{j=1}^{n} 2j^3 - 2m^3$

(e) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}$

6. Beweise, dass folgende Gleichungen richtig sind, indem du die Summen ausschreibst, umsortierst und wieder zusammensetzt.

(a) $\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$

(b) $\sum_{k=1}^{n}(a \cdot x_k + b \cdot y_k + c) = a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k + b \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k + n \cdot c$