

(b) Gegeben sei die folgende Wahrheitstafel:

A	B	(a)	(b)	(c)
w	w	w	w	f
w	f	w	f	f
f	w	f	f	w
f	f	w	w	f

Finde entsprechende Formeln für (a) , (b) und (c) , die nur die Aussagen A und B sowie die Konjunktoren \wedge , \vee und \neg enthalten.

(c*) Finde möglichst viele verschiedene Formeln, die äquivalent zu $A \Rightarrow B$ sind.

4. Systematisches Knobeln

(a) Fred möchte mit möglichst vielen seiner Freunde Anne, Bernd, Christine, Dirk und Eva seinen Geburtstag feiern. Er weiß jedoch:

1. Wenn Bernd und Anne kommen, dann kommt Eva nicht.
2. Wenn Bernd und Eva kommen, dann kommt Dirk nicht.
3. Eva kommt nur, wenn Christine und Dirk kommen.
4. Christine kommt nur, wenn Anne kommt.
5. Anne kommt nur, wenn Bernd oder Christine kommt.

Wie viele (und welche) Freunde kommen im besten Fall zu Freds Geburtstagsfeier?

(b) Auf der Insel Wafa leben zwei Stämme. Die Was, die immer die Wahrheit sagen, und die Fas, die immer lügen. Eine Reisende besucht die Insel und trifft auf die drei Einwohner A , B und C , die ihr Folgendes erzählen:

A : B und C sagen genau dann die Wahrheit, wenn C die Wahrheit sagt.

B : Wenn A und C die Wahrheit sagen, dann ist es nicht der Fall, dass A die Wahrheit sagt, wenn B und C die Wahrheit sagen.

C : B lügt genau dann, wenn A oder B die Wahrheit sagen.

Welchen Stämmen gehören A , B und C an?

(c) Nach einem Einbruch in eine Bankfiliale wurden die drei Verdächtigen Alex, Bob und Charly einzeln verhört, wobei sie keine Gelegenheit hatten, ihre Aussagen untereinander abzusprechen. Da es keine Zeugen gibt und keine Fingerabdrücke gefunden werden konnten, ist nicht klar, ob die Tat von einer einzelnen Person, von zwei oder sogar von allen drei Personen begangen wurde. Mindestens einer der drei einschlägig vorbestraften Verdächtigen war beim Einbruch dabei. Alle drei wurden einzeln in den Vernehmungsraum gebeten.

Alex wurde als Erster vernommen und sagte aus, dass ein Einbruch für ihn nicht mehr in Frage kommt, Bob und Charly jedoch nicht davor zurückschreckten und in die Bank eingebrochen sind. Bob erwähnte, dass er und Charly nichts damit zu tun hätten, Alex jedoch Einbruchpläne hatte. Und Charly beteuerte wiederum, dass Alex und Bob detaillierte Pläne für den Einbruch hatten, er sich selbst jedoch völlig heraus gehalten hätte. Wie soll Kommissar Fuchs nun aus diesen drei unterschiedlichen Aussagen schlau werden?

Kommissar Fuchs sah sich das Vernehmungsprotokoll an, dachte ein wenig nach, kritzelte auf seinem Notizblock herum und sagte schließlich: „Jetzt weiß ich es! Gehen wir einmal davon aus, dass jeder Schuldige lügt und jeder Unschuldige uns die Wahrheit sagt, dann steht Bob auf jeden Fall eine lange Zeit im Gefängnis bevor.“

(a) Zeige mithilfe einer Wahrheitstabelle, wie Bob entlarvt werden konnte.

Nun ist aber noch nicht klar, ob Bob den Einbruch alleine beging oder ob er einen Komplizen hatte. Als Bob mit obigen Überlegungen überführt wurde, gibt er seinen Widerstand auf und sagt: „Alleine habe ich den Einbruch nicht begangen. Charly und Alex haben im Verhör beide nicht die Wahrheit gesagt.“

Nun ist aber noch nicht klar, ob Bob den Einbruch alleine beging oder ob er einen Komplizen hatte. Als Bob mit obigen Überlegungen überführt wurde, gibt er seinen Widerstand auf und sagt: „Alleine habe ich den Einbruch nicht begangen. Charly und Alex haben im Verhör beide nicht die Wahrheit gesagt.“

(b) Wer war noch an dem Einbruch beteiligt?

5. Logik pur

Mithilfe von Wahrheitwerttafeln lassen sich eine ganze Reihe von Umformungsregeln für logische Formeln beweisen. So gilt für alle Aussagen A, B, C :

(i)	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, \quad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	Kommutativität
(ii)	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	Assoziativität
(iii)	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität
(iv)	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	Doppelte Negation
(v)	$A \wedge A \Leftrightarrow A, \quad A \vee A \Leftrightarrow A$	Idempotenz
(vi)	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A, \quad A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	Absorption
(vii)	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	De Morgan
(viii)	$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$	Auflösung der Implikation
(ix)	$A \vee \neg A \quad (\equiv 1)$	Tertium non datur
(x)	$\neg(A \wedge \neg A) \quad (\equiv 1)$	Satz vom Widerspruch

Mithilfe dieser Regeln lassen sich aussagenlogische Formeln vereinfachen, ohne dass man die einzelnen Aussagen kennt.

(a) Vereinfache so weit wie möglich

(i) $\neg((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C))$

(ii) $\neg(\neg(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C)))$