6. Die Implikation und ihre Geschwister

Um eine mathematische Behauptung zu beweisen, ist es oft sinnvoll, sie als logische Implikation auszudrücken:

„Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade.“

$$\Updownarrow$$

„**Wenn** zwei ganze Zahlen a, b gerade sind, **dann** ist ihre Summe $a + b$ gerade.“

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{a, b \in \mathbb{Z} \text{ gerade}}_{A} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{a + b \text{ gerade}}_{B}$$

Oft können wir eine solche Implikation durch einen *direkten Beweis* zeigen. Wir nehmen A an und folgern daraus B.

(a) Beweise die obige Aussage direkt.
Hinweis: Was bedeutet es für eine Zahl, gerade zu sein?

Nicht immer gelingt der direkte Beweis einer Implikation. Dann kann man versuchen, äquivalente Aussagen zu beweisen.

(b) Vervollständige die folgende Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w			
w	f			
f	w			
f	f			

Manchmal ist es einfacher, statt der Implikation $A \Rightarrow B$ ihre sogenannte Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu beweisen.

(c) Beweise per Kontraposition:

(i) Gilt $n \cdot m \neq 0$, so folgt $n \neq 0$ und $m \neq 0$.

(ii) Wenn $\frac{a+b}{a-b}$ nicht kürzbar ist, dann ist auch $\frac{a}{b}$ nicht kürzbar.

Nicht zu verwechseln ist der Kontrapositionsbeweis mit dem *Widerspruchsbeweis* (rechte Spalte unter (b)). Wir nehmen an, dass A gilt, aber B nicht und zeigen, dass das nicht sein kann, weil es auf einen Widerspruch führt.

(d) Beweise per Widerspruch: „Wenn x^2 gerade ist, dann ist x gerade.“
Wie sähe ein Kontrapositionsbeweis dieser Aussage im Vergleich dazu aus?

7. Logisch denken

(a) Wie viele der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a < b \land b < c) \Rightarrow a < c$

(ii) $(5 < 6 \land 6 < 7) \Rightarrow 5 < 7$

(iii) $(5 < 4 \land 4 < 7) \Rightarrow 5 < 7$

(iv) $(5 < 6 \land 6 < 4) \Rightarrow 5 < 4$

(b) Das folgende Rätsel stammt von Lewis Carroll (Autor von „Alice im Wunderland“ und selbst Mathematiker):

> Wir setzen folgende fünf Aussagen als wahr voraus – ob sie es in der Realität auch sind, sei dahingestellt!
>
> (1) Kein Kätzchen, das Fisch liebt, ist unbelehrbar.
>
> (2) Kein Kätzchen ohne Krallen spielt mit Gorillas.
>
> (3) Kätzchen mit Schnurrhaaren mögen Fisch.
>
> (4) Kein belehrbares Kätzchen hat grüne Augen.
>
> (5) Kein Kätzchen hat Krallen, wenn es keine Schnurrhaare hat.
>
> Was können Sie aus (1) bis (5) über die Spielvorlieben von Kätzchen mit grünen Augen schlussfolgern?

Löse Carolls Rätsel.
Hinweis: Formalisiere die Aussagen und nutze die Gesetze der Aussagenlogik.

(c) Welche der folgenden Implikationen ist/sind wahr? Gelten die Umkehrungen?

Beweise oder widerlege jede der sechs Aussagen mithilfe geeigneter Beweistechniken.

(i) $a \cdot b$ ist gerade $\Rightarrow$ a ist gerade oder b ist gerade

(ii) $a + b$ ist nicht durch 2 teilbar $\Rightarrow$ a ist gerade oder b ist gerade

(iii) Wenn b und c Quadratzahlen sind, dann ist auch $b \cdot c$ eine Quadratzahl.