Interessante Induktionen

1. (Wiederholung:) Das Prinzip der vollständigen Induktion

Die *vollständige Induktion* ist ein Beweisverfahren, mit dem eine Aussage für alle natürlichen Zahlen ab einem bestimmten Startwert bewiesen werden kann.

Prinzip der vollständigen Induktion

Der Beweis, dass die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt, erfolgt in zwei Schritten:

(IA) Im **Induktionsanfang** wird die Gültigkeit der Aussage $A(n_0)$ gezeigt, d. h., dass die Aussage für eine Startzahl n_0 stimmt.

„Die Aussage gilt für einen Startwert.“

(IS) Im **Induktionsschritt** wird dann für $n \geq n_0$ gezeigt, dass die Gültigkeit der Aussage $A(n+1)$ aus der Gültigkeit der Aussage $A(n)$ folgt.

„Gilt die Aussage für eine beliebige Zahl, so gilt sie auch für deren Nachfolger.“

Ausgehend vom Beweis für den Startwert erledigt der Induktionsschritt den Beweis für alle natürlichen Zahlen oberhalb des Startwertes.

Beispiel.

Wir möchten beweisen, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Aussage gilt:

$$A(n)\colon n^2 + n \text{ ist durch 2 teilbar.}$$

(IA) Setze $n_0 := 1$. Dann ist $(1)^2 + (1) = 2$ tatsächlich durch 2 teilbar.
Die Aussage stimmt also für $n_0 = 1$, d. h. es gilt $A(1)$.

(IS) Wir möchten zeigen: Für alle $n \geq n_0 = 1$ folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$.

Angenommen, es gilt $A(n)$, d. h. $n^2 + n$ ist durch 2 teilbar. Nun überprüfen wir, ob dann auch $A(n+1)$ gilt. Setze also $n := n+1$ in der Aussage und forme um, bis der Term $n^2 + n$ zu erkennen ist:

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (n^2 + n) + 2(n+1).$$

Der erste Teil der Summe ist wegen der Gültigkeit von $A(n)$ durch 2 teilbar. Und der zweite Teil der Summe ist ein Produkt von 2 und einer anderen natürlichen Zahl, also auch durch 2 teilbar. Damit ist die ganze Summe durch 2 teilbar. Es gilt also tatsächlich $A(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ also für *alle* $n \geq 1$.

2. Aufgaben zum Warmwerden: Teilbarkeit

Beweise die folgenden Aussagen wie im obigen Beispiel mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) Die Zahl $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar.

(b) Die Zahl $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

(c) Die Zahl $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.
Hinweis: Es gilt $3n^2 + 3n = 3n(n+1)$. Warum ist Letzteres durch 6 teilbar?

3. Aufgaben zum Vertiefen: Ungleichungen

(a) Beweise, dass $n^3 > 2n + 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.
Achte darauf, die Induktionsprozedur sauber aufzuschreiben.

(b) Für welche natürlichen Zahlen gilt $n! > n^2$?
Beweise deine Behauptung.

4. Was induziert hier was?

Folgende Aussage soll induktiv bewiesen werden:

Jedes natürliche Vielfache von 13 lässt sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben, d. h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ existieren natürliche Zahlen a und b mit $13^k = a^2 + b^2$.

(a) Weise nach, dass die Aussage für $k = 1$ gilt.

(b) Beweise nun: Wenn die Aussage für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt sie auch für $k+2$.

(c) Die Aussage ist durch (a) und (b) noch nicht für alle natürlichen Zahlen bewiesen. Kannst du den Beweis vervollständigen?

5. Die verallgemeinerte Induktion

Wir definieren uns eine Folge $a_1, a_2, a_3, ...$ von Zahlen wie folgt:

$$a_1 := 1, \quad a_2 := 3, \quad a_n := 2a_{n-1} - a_{n-2}.$$

(a) Berechne die ersten sechs Zahlen der so definierten Folge.

(b) Versuche mit vollständiger Induktion zu beweisen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n = 2n - 1$.
Hinweis. Formuliere und nutze die Induktionsvoraussetzung sauber. Welches Problem tritt auf und wie könnte man es lösen?

6. Eine Induktion für Informatiker

Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\underbrace{1010\ldots10}_{n \text{ mal „10“}}{}_{(2)} = \frac{2 \cdot (4^n - 1)}{3}$$

gilt, wobei die Zahl auf der linken Seite eine *Binärzahl* ist.

Zur Erinnerung: Der Stellenwert einer Binärzahl entspricht der zu dieser Stelle gehörenden Zweierpotenz. So ist zum Beispiel

$$1011_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 9_{(10)}.$$

7. Summenformeln

Wir erinnern uns an den kleinen Gauß und seine Summenformel für die ersten n Zahlen:

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2},$$

(a) Erkläre den Rechentrick des kleinen Gauß:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \ldots & n+1 & n+1 \end{array}$$

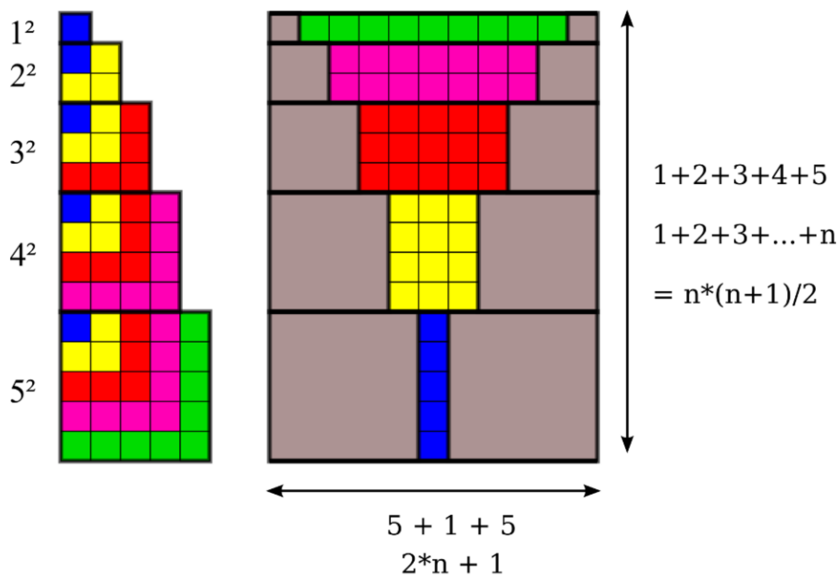
Summenformeln wie diese können in der Regel auch induktiv bewiesen werden.

(b) Beweise durch vollständige Induktion die Gaußsche Summenformel für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Formuliere die Induktionsprozedur sorgfältig.

Auch für die Summe der ersten n *Quadratzahlen*,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2,$$

gibt es eine Summenformel. Die folgende Abbildung veranschaulicht die Summe der ersten $n=5$ Quadratzahlen:



(c) Stelle mithilfe dieser Abbildung eine Vermutung für eine allgemeine Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen auf.
Hinweis: Die gesuchte Summenformel besteht im Zähler aus drei Faktoren.

(d) Beweise deine Vermutung induktiv für alle natürlichen Zahlen.

8. Überzeugende Induktionen?

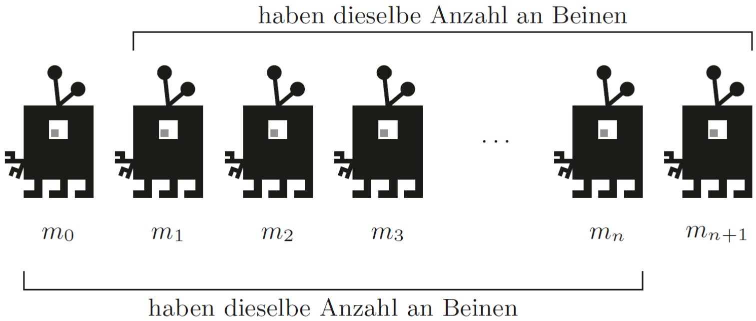
Ohne jemals eines gesehen zu haben, beweisen wir induktiv: *Alle Marsmännchen haben dieselbe Anzahl an Beinen.* Es gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$:

$A(n)$: In einer Gruppe von n Marsmännchen haben alle dieselbe Anzahl an Beinen.

Induktionsanfang: Offenbar gilt $A(1)$, denn in einer Gruppe von einem Marsmännchen haben alle dieselbe Anzahl an Beinen.

Induktionsschritt: Wir zeigen $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, d. h. wenn in einer Gruppe von n alle dieselbe Anzahl an Beinen haben, dann auch in einer Gruppe von $n+1$.

Dazu teilen wir $n+1$ Marsmännchen zweimal in eine n-Gruppe und ein übriges auf:

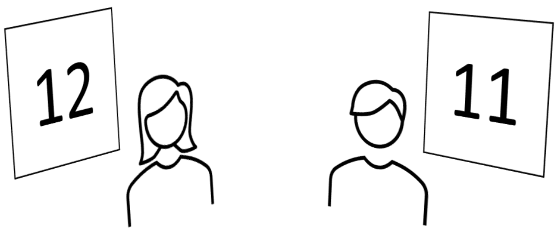


In beiden n-Gruppen haben alle Marsmännchen nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Anzahl an Beinen. Und weil einige in beiden Gruppen sind, müssen letzlich alle $n+1$ Marsmännchen dieselbe Anzahl an Beinen haben.

Was geht hier schief?

9. Zum Grübeln

Alice und Bob sitzen sich gegenüber. Den beiden werden zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen zugewiesen. Alice sieht nur Bobs Zahl und Bob sieht nur Alice' Zahl. Sie haben die Aufgabe, ihre eigene Zahl herauszufinden, dürfen sich zu diesem Zweck aber bloß abwechselnd eine Frage stellen (und müssen diese wahrheitsgemäß beantworten): „Weißt du, welche Zahl du hast?“



Wir gehen davon aus, dass Alice und Bob beide logisch schlussfolgern können und dies auch vom jeweils anderen erwarten.

Beweise, dass nach endlich vielen Schritten einer von beiden mit „Ja“ antworten kann – egal, welche Zahlen die beiden bekommen haben.
Hinweis: Spiele den Dialog zwischen den beiden für die Zahlen 1 und 2 sowie für die Zahlen 2 und 3 durch. Verallgemeinere dann das Muster.