MSG-Zirkel 9b | 12. Juni 2025

Knobelaufgaben

1. Fast-Food-Mathematik

Das Schnellrestaurant „Zur Goldenen Möwe“ verkauft seine beliebten Chicken-Nuggets in 6er-, 9er- und 20er-Packungen.

(a) Was ist die größte Anzahl Chicken-Nuggets, die man mit diesen Packungsgrößen *nicht* bestellen kann?

Wir nehmen an, dass ab jetzt nur noch die beiden großen Packungen mit $a = 9$ bzw. $b = 20$ Nuggets verfügbar sind.

(b) Zeige, dass man mit diesen Packungsgrößen zwar genau 152 Nuggets erhalten kann, aber nicht 151 Nuggets. Gib dazu ein Verfahren an, mit dem man für jede (ausreichend große) Zahl $m \in \mathbb{N}$ die benötigten Anzahlen ermitteln kann.
Tipp: Da $a = 9$ und $b = 20$ teilerfremd sind, lassen sich mit dem euklidischen Algorithmus zwei ganze Zahlen x und y mit $x \cdot a + y \cdot b = 1$ finden.

(c) Beweise, dass es für beliebige Packungsgrößen $a, b \in \mathbb{N}$ keine natürlichen Zahlen k und l mit $ab - a - b = k \cdot a + l \cdot b$ gibt, indem du aus dieser Gleichung einen Widerspruch ableitest.

(d*) Sei nun $m \geq ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$. Wir wissen schon aus (b), dass es zwei ganze Zahlen x und y mit $m = xa + yb$ gibt. Setzt man $x' := x + tb$ und $y' := y - tb$, so ist auch $m = x'a + y'b$ eine geeignete Darstellung. Nun wählen wir t so, dass $0 \leq x \leq b - 1$ ist.

Zeige, dass dann auch $y \geq 0$ gelten muss.

Hinweis: Damit ist gezeigt, dass $ab - a - b$ die größte Zahl ist, die man nicht wie gewünscht aus a und b kombinieren kann.

2. Neubau-Mathematik

In der Straße „Intervallgasse“ dürfen Häuser nach den folgenden Regeln gebaut werden:

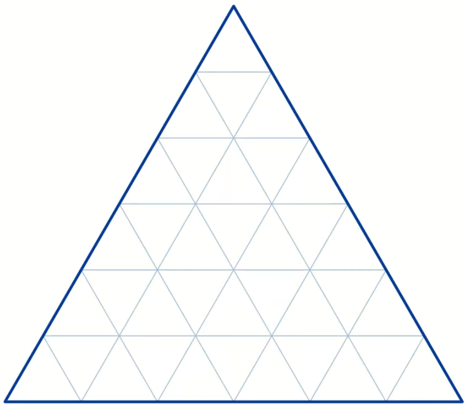
- Das 1. Haus darf frei platziert werden.
- Das 2. Haus muss so platziert werden, dass ein Haus in der linken und ein Haus in der rechten Hälfte der Straße steht.
- Das 3. Haus muss so platziert werden, dass ein Haus im ersten Drittel, ein Haus im zweiten Drittel und ein Haus im letzten Drittel der Straße steht.
- Das n-te Haus muss so platziert werden, dass in jedem von n gleich langen Abschnitten genau ein Haus steht.

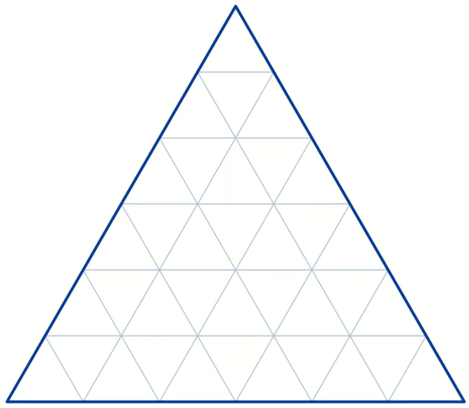
Wie viele Häuser kannst du auf diese Weise platzieren?

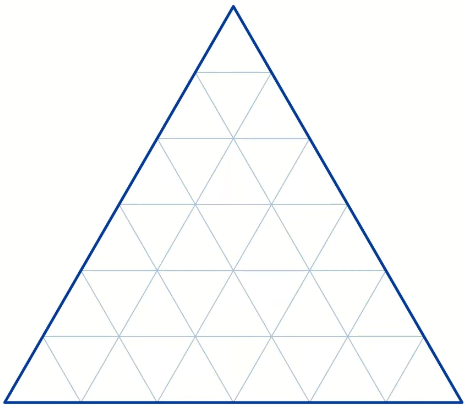
Christoph Lieben c.lieben@hu-berlin.de

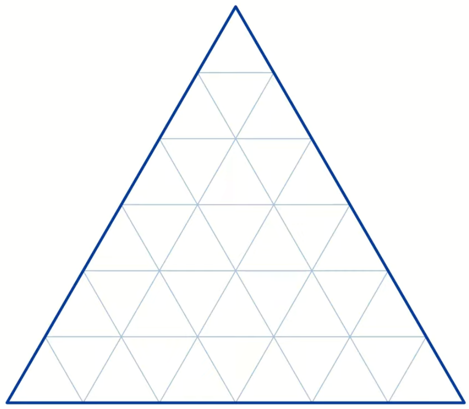
Zum Einstieg: Ein schwieriges Erbe

Ein Bauer besitzt ein Grundstück, das exakt die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat.









Das Grundstück möchte er seiner Frau und seinen beiden Kindern vererben. Aus Gründen der Gerechtigkeit sollen alle drei Teilstücke die gleiche Form haben. Allerdings soll das Teilstück der Ehefrau um den Faktor 2 größer sein als die Teilstücke der Kinder.
Wie muss das Grundstück geteilt werden?