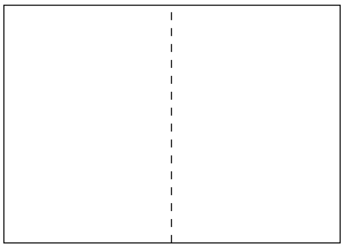
Mathematisches Papierfalten

1. Vorüberlegungen

Rechtecke im DIN-Format haben eine charakteristische Eigenschaft:

Faltet man ein DIN-Rechteck in der Mitte der langen Seite, entsteht ein Rechteck mit *demselben Seitenverhältnis*.



(a) Die kurze Seite eines DIN-Rechtecks habe die Länge a. Wie lang ist dann die lange Seite?

(b) Ein DIN-A0-Rechteck hat einen Flächeninhalt von $1\,\mathrm{m}^2$. Bestimme die Seitenlängen eines DIN-A0-Rechtecks.

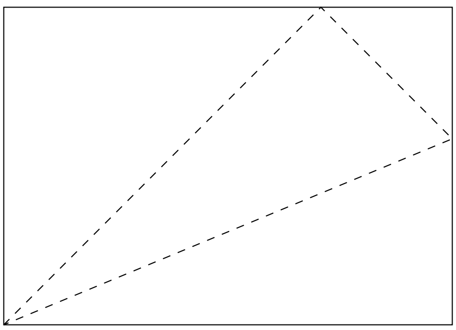
(c) Durch mehrmaliges Halbieren entsteht aus einem DIN-A0-Rechteck zunächst ein DIN-A1-Rechteck, dann ein DIN-A2-Rechteck usw. Bestimme die Seitenlängen eines DIN-A4-Rechtecks rechnerisch und miss anschließend an einem DIN-A4-Blatt nach.

2. $\sqrt{2}$ ist irrational (DIN-Edition)

Lege ein DIN-A4-Blatt im Querformat vor dich und führe de folgenden Schritte durch:

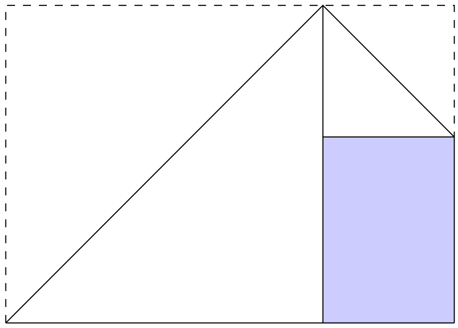
- Falte die obere linke Ecke so auf die untere Seite des Blatts, dass die linke Seite auf der unteren Seite zu liegen kommt. Falte das Blatt dann wieder auf.
- Falte die untere rechte Ecke auf den auf der oberen Seite erzeugten Knick. Falte das Blatt noch NICHT wieder auf.
- Falte das oben rechts entstandene Dreieck über die längste Seite nach innen. Falte anschließend alles wieder auf.

Nun sollte dein Blatt so aussehen:



(a) Begründe, dass die beiden Dreiecke oben links und oben rechts gleichschenklig sind.

Falte nun die beiden Dreiecke oben links und oben rechts über ihre Hypotenuse nach innen:

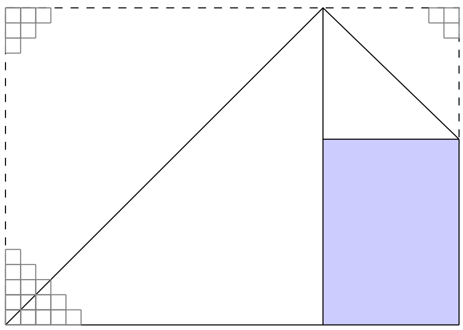


(b) Beweise, dass das unten rechts entstehende Rechteck wieder ein DIN-Rechteck ist:

(i) Bestimme die Seitenlängen des kleinen Rechtecks in Abhängigkeit von a, wobei a die Länge der kurzen Seite des ursprünglichen Blatts ist.

(ii) Rechne nach, dass das Verhältnis von langer zu kurzer Seite des kleinen Rechtecks auch $\sqrt{2}$ ist.
Tipp: Wurzeln im Nenner eines Bruchs verschwinden, wenn man den Bruch so erweitert, dass man im Nenner die 3. binomische Formel anwenden kann.

Nun nehmen wir an, dass das DIN-Blatt *randlos* mit einem Gitter aus vielen kleinen identischen Quadraten bedruckt werden kann, und zwar mit m Quadraten entlang der langen und n Quadraten entlang der kurzen Seite.



(c) Begründe, dass dann auch das kleine Rechteck randlos mit Quadraten überdeckt wird, d. h. dass die entsprechenden Knickfalze entlang von Gitterlinien verlaufen.

Damit haben wir bewiesen, dass ein DIN-Rechteck in Wahrheit gar nicht randlos mit $m \cdot n$ Quadraten überdeckt werden kann! Und da das Seitenverhältnis eines DIN-Rechtecks $\sqrt{2}$ ist, gibt es keine natürlichen Zahlen m und n mit $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, d. h. $\sqrt{2}$ ist irrational.

(d) *Warum* kann ein DIN-Rechteck in Wahrheit gar nicht randlos mit $m \cdot n$ Quadraten überdeckt werden?