Logisch, oder?

1. Peter Wasons Auswahlaufgabe

Es soll die folgende Regel gelten: „Wenn auf der einen Seite ein Vokal steht, dann steht auf der anderen Seite eine gerade Zahl.“

E	K	4	7

(a) Welche dieser Karten müssen umgedreht werden, um die Gültigkeit der Regel zu überprüfen?

(b) In Tests haben über 90% der Probanden eine richtige und eine falsche Karte umgedreht – welche?

2. Aussagen und Verknüpfungen – die Grundbausteine der Logik

Die mathematische Logik untersucht systematisch den Wahrheitsgehalt von Aussagen.

> **Definition:**
>
> Unter einer (logischen) *Aussage* versteht man ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das die Eigenschaft hat, entweder wahr oder falsch zu sein.

(a) Diskutiert, ob es sich bei den folgenden Sätzen um logische Aussagen handelt.

- Wenn x eine gerade Zahl ist, dann ist x durch 2 teilbar.
- Berlin liegt in Deutschland und Schnee ist weiß.
- Berlin liegt in Deutschland und Schnee ist schwarz.
- $(3 + 7) \cdot 2$
- Do you speak Englisch?
- Alle Knaffs sind grüne Hunkis.
- Jede gerade Zahl größer als 2 ist als Summe zweier Primzahlen darstellbar.
- Wenn ich 700 Jahre alt werde, werde ich 700 Jahre alt.
- Nimm eine Schmerztablette.
- $(3 + 7) \cdot 2 = 20$
- Dieser Satz ist falsch.
- Erbsen sind lecker.
- Die Innenwinkel eines Dreiecks ergänzen sich zu 180°.
- Wenn der Mond ein grüner Käse ist, dann ist $2 + 2 = 5$.

Oft kommt es bei logischen Betrachtungen gar nicht so genau auf die *Semantik*, d. h. auf den inhaltlichen Gehalt einer Aussage an, sondern nur auf die *Syntax*, d h. auf die logische Form der Aussage.

Typischerweise bezeichnet man elementare Aussagen mit Großbuchstaben (A, B, C, ...) und verbindet sie mithilfe von Junktoren zu zusammengesetzten Aussagen:

nicht (Negation)	$\neg$
und (Konjunktion)	$\wedge$
oder (Disjunktion)	$\vee$
wenn-dann (Implikation)	$\Rightarrow$
genau dann, wenn (Äquivalenz)	$\Leftrightarrow$

(b) Es seien die folgenden Elementaraussagen gegeben:

K: Es ist eiskalt.

S: Es schneit.

Drücke die nachfolgenden Sätze als aussagenlogische Formel aus.

(i) (*Beispiel*:) Es ist eiskalt und es schneit. ($K \wedge S$)

(ii) Es ist eiskalt, aber es schneit nicht.

(iii) Es ist nicht der Fall, dass es eiskalt ist oder schneit.

(iv) Es ist nicht kalt und es schneit nicht.

(v) Es ist eiskalt oder es schneit (oder beides).

(vi) Entweder es schneit *oder* es ist eiskalt.

(vii) Es schneit oder es ist eiskalt, aber es schneit nicht, wenn es eiskalt ist.

3. Wahrheitswerttafeln

Für jeden Junktor ist festgelegt, ob die zusammengesetzte Aussage wahr (w) bzw. falsch (f) ist, wenn die Einzelaussagen wahr bzw. falsch sind. Das lässt sich übersichtlich mithilfe einer *Wahrheitswerttafel* darstellen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Wichtig:

- Das logische **oder** ist ein *einschließendes* **oder**.
- Bei Konjunktion, Disjunktion und Äquivalenz ist die Reihenfolge unwichtig.
- Dass eine Implikation immer wahr ist, wenn das Vorderglied falsch ist, ist eine *Festlegung*, die sich als sinnvoll herausgestellt hat.

(a) Beweise mithilfe einer Wahrheitswerttafel die *de-morganschen Gesetze*, indem du zeigst, dass folgende Ausdrücke immer wahr sind:

(i) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(b) Gegeben sei die folgende Wahrheitswerttafel:

A	B	(a)	(b)	(c)
w	w	w	w	f
w	f	w	f	f
f	w	f	f	w
f	f	w	w	f

Finde entsprechende Formeln für (a), (b) und (c), die nur die Aussagen A und B sowie die Konjunktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthalten.

(c*) Finde möglichst viele verschiedene Formeln, die äquivalent zu $A \Rightarrow B$ sind.

4. Systematisches Knobeln

(a) Fred möchte mit möglichst vielen seiner Freunde Anne, Bernd, Christine, Dirk und Eva seinen Geburtstag feiern. Er weiß jedoch:

1. Wenn Bernd und Anne kommen, dann kommt Eva nicht.
2. Wenn Bernd und Eva kommen, dann kommt Dirk nicht.
3. Eva kommt nur, wenn Christine und Dirk kommen.
4. Christine kommt nur, wenn Anne kommt.
5. Anne kommt nur, wenn Bernd oder Christine kommt.

Wie viele (und welche) Freunde kommen im besten Fall zu Freds Geburtstagsfeier?

(b) Auf der Insel Wafa leben zwei Stämme. Die Was, die immer die Wahrheit sagen, und die Fas, die immer lügen. Eine Reisende besucht die Insel und trifft auf die drei Einwohner A, B und C, die ihr Folgendes erzählen:

A: B und C sagen genau dann die Wahrheit, wenn C die Wahrheit sagt.

B: Wenn A und C die Wahrheit sagen, dann ist es nicht der Fall, dass A die Wahrheit sagt, wenn B und C die Wahrheit sagen.

C: B lügt genau dann, wenn A oder B die Wahrheit sagen.

Welchen Stämmen gehören A, B und C an?

(c) Nach einem Einbruch in eine Bankfiliale wurden die drei Verdächtigen Alex, Bob und Charly einzeln verhört, wobei sie keine Gelegenheit hatten, ihre Aussagen untereinander abzusprechen. Da es keine Zeugen gibt und keine Fingerabdrücke gefunden werden konnten, ist nicht klar, ob die Tat von einer einzelnen Person, von zwei oder sogar von allen drei Personen begangen wurde. Mindestens einer der drei einschlägig vorbestraften Verdächtigen war beim Einbruch dabei. Alle drei wurden einzeln in den Vernehmungsraum gebeten.

Alex wurde als Erster vernommen und sagte aus, dass ein Einbruch für ihn nicht mehr in Frage kommt, Bob und Charly jedoch nicht davor zurückschreckten und in die Bank eingebrochen sind. Bob erwähnte, dass er und Charly nichts damit zu tun hätten, Alex jedoch Einbruchpläne hatte. Und Charly beteuerte wiederum, dass Alex und Bob detaillierte Pläne für den Einbruch hatten, er sich selbst jedoch völlig heraus gehalten hätte. Wie soll Kommissar Fuchs nun aus diesen drei unterschiedlichen Aussagen schlau werden?

Kommissar Fuchs sah sich das Vernehmungsprotokoll an, dachte ein wenig nach, kritzelte auf seinem Notizblock herum und sagte schließlich: „Jetzt weiß ich es! Gehen wir einmal davon aus, dass jeder Schuldige lügt und jeder Unschuldige uns die Wahrheit sagt, dann steht Bob auf jeden Fall eine lange Zeit im Gefängnis bevor.“

(a) Zeige mithilfe einer Wahrheitstabelle, wie Bob entlarvt werden konnte.

Nun ist aber noch nicht klar, ob Bob den Einbruch alleine beging oder ob er einen Komplizen hatte. Als Bob mit obigen Überlegungen überführt wurde, gibt er seinen Widerstand auf und sagt: „Alleine habe ich den Einbruch nicht begangen. Charly und Alex haben im Verhör beide nicht die Wahrheit gesagt.“

Nun ist aber noch nicht klar, ob Bob den Einbruch alleine beging oder ob er einen Komplizen hatte. Als Bob mit obigen Überlegungen überführt wurde, gibt er seinen Widerstand auf und sagt: „Alleine habe ich den Einbruch nicht begangen. Charly und Alex haben im Verhör beide nicht die Wahrheit gesagt.“

(b) Wer war noch an dem Einbruch beteiligt?

5. Logik pur

Mithilfe von Wahrheitswerttafeln lassen sich eine ganze Reihe von Umformungsregeln für logische Formeln beweisen. So gilt für alle Aussagen A, B, C:

(i)	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, \quad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	**Kommutativität**
(ii)	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	**Assoziativität**
(iii)	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	**Distributivität**
(iv)	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	**Doppelte Negation**
(v)	$A \wedge A \Leftrightarrow A, \quad A \vee A \Leftrightarrow A$	**Idempotenz**
(vi)	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A, \quad A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	**Absorption**
(vii)	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	**De Morgan**
(viii)	$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$	**Auflösung der Implikation**
(ix)	$A \vee \neg A \quad (\equiv 1)$	**Tertium non datur**
(x)	$\neg(A \wedge \neg A) \quad (\equiv 1)$	**Satz vom Widerspruch**

Mithilfe dieser Regeln lassen sich aussagenlogische Formeln vereinfachen, ohne dass man die einzelnen Aussagen kennt.

(a) Vereinfache so weit wie möglich

(i) $\neg\big((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)\big)$

(ii) $\neg\big(\neg(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C))\big)$