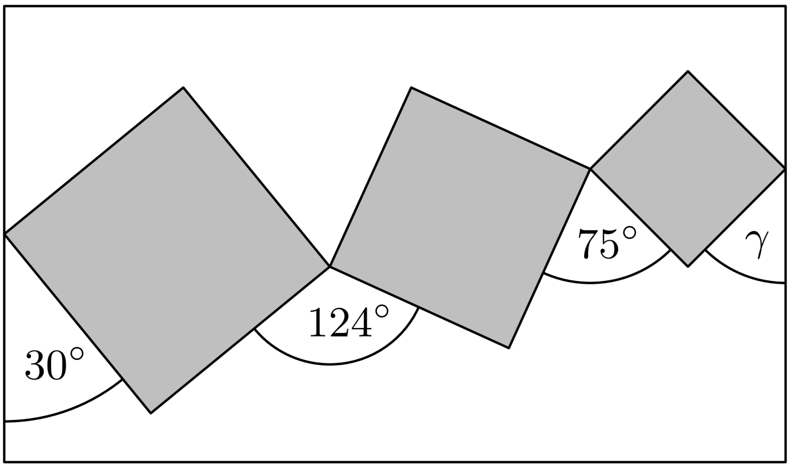
Verwinkeltes und Kongruentes

1. Quadratkette

In einem Rechteck liegen drei Quadrate, die sich gegenseitig bzw. das Rechteck mit je einem Eckpunkt berühren:

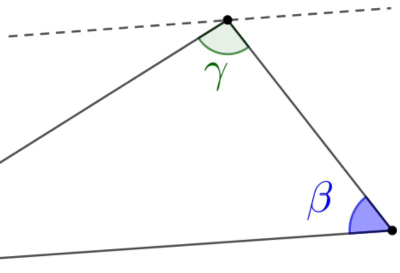


(a) Ermittle die Größe des Winkels γ.

(b) Welche geometrischen Zusammenhänge hast du in (a) genutzt?

2. Winkelwiederholung

Es seien α, β und γ die Innenwinkel eines Dreiecks.



(a) Zeichne einen *Scheitelwinkel*, einen *Stufenwinkel* und einen *Wechselwinkel* von β ein.

(b) Beweise, dass $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ gilt.

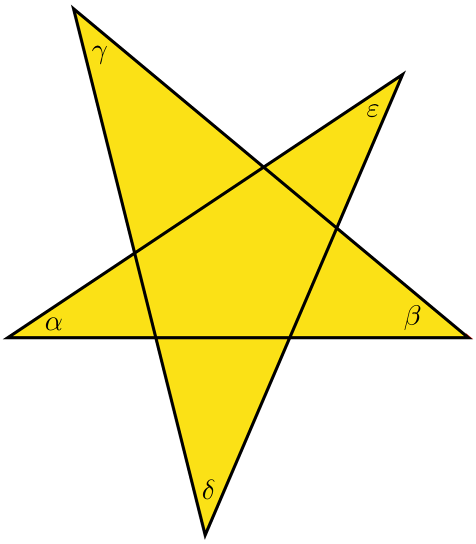
(c) Welche Innenwinkelsumme haben Vierecke? Begründe.

Ein *Außenwinkel* ist der außen liegende Winkel zwischen einer Seite und der Verlängerung einer benachbarten Seite eines Vielecks.

(d) Beweise, dass ein Außenwinkel im Dreieck genauso groß ist wie die beiden nicht anliegenden *Innen*winkel zusammen.

3. Die Winkelsumme im Fünfstern

Ein *Fünfstern* ist ein Figur, der sich ergibt, wenn man die Seiten eines Fünfecks so verlängert, dass sie sich treffen.



Wie groß ist die Summe $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon$ der Winkel in den Spitzen des Fünfsterns? Formuliere eine Vermutung und beweise sie.

4. Dreieckskongruenzen

Es seien die Seitenlängen $a = 3$cm, $b = 4$cm und $c = 5$cm festgelegt.

(a) Konstruiere möglichst viele verschiedene Dreiecke mit den Seitenlängen a, b und c.

Nun seien die drei Winkel $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ und $\gamma = 90°$ festgelegt.

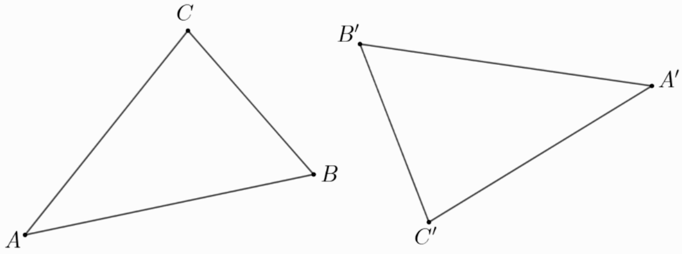
(b) Konstruiere möglichst viele verschiedene Dreiecke mit den Innenwinkeln α, β und γ. Was fällt dir im Vergleich zu (a) auf?

Zwei Dreiecke heißen (zueinander) *kongruent*, wenn sie deckungsgleich sind, d. h. wenn sie durch Verschieben, Drehen oder Spiegeln ineinander überführt werden können.

Wenn die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zueinander kongruent sind (Schreibweise: $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$), dann gilt:

(i) $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$,
$|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$,
$|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$,

(ii) $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$,
$|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'|$,
$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'A'B'|$.



In (a) haben wir schon festgestellt, dass zwei Dreiecke schon dann kongruent sind, wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen [SSS].

(c) Überprüfe, ob zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie
  (i) in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen [SWS],
  (ii) in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen [WSW],
  (iii) in zwei Seiten und einem *nicht* eingeschlossenen Winkel übereinstimmen [SSW].

5. Kongruenzbeweise

Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, in dem jeweils gegenüberliegender Seiten parallel sind.

*(a) Zeige mithilfe von kongruenten Dreiecken, dass die gegenüberliegenden Seiten in einem Parallelogramm gleich lang sind.

*(b) Zeige, dass auch umgekehrt gilt: Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sind, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

**(c) Beweise: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich seine Diagonalen gegenseitig halbieren.
Hinweis: Das ist eine Äquivalenzaussage ($\Leftrightarrow$). Beweise beide Richtungen einzeln.

Ein *Trapez* ist ein Viereck, in dem zumindest ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel ist.

***(d) (590832) Beweise die beiden folgenden Sätze:
  (i) Für jedes Trapez $ABCD$ mit den zueinander parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie den Punkten B und C auf derselben Seite der Gerade AD gilt: Wenn M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$ ist und die Gerade g parallel zur Geraden AB durch den Punkt M verläuft, dann schneidet die Gerade g die Seite $\overline{BC}$ in deren Mittelpunkt.
  (ii) Für jedes Viereck $ABCD$ mit rechten Innenwinkeln $\sphericalangle BAD$ unf $\sphericalangle CBA$ sowie den Punkten C und D auf derselben Seite der Gerade AB gilt: Wenn M der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$ ist, dann sind die Winkel $\sphericalangle CBM$ und $\sphericalangle MAD$ gleich groß.