Mittelparallelen und der Satz von Varignon

1. Wiederholung: Kongruenzsätze

Wir wissen bereits:

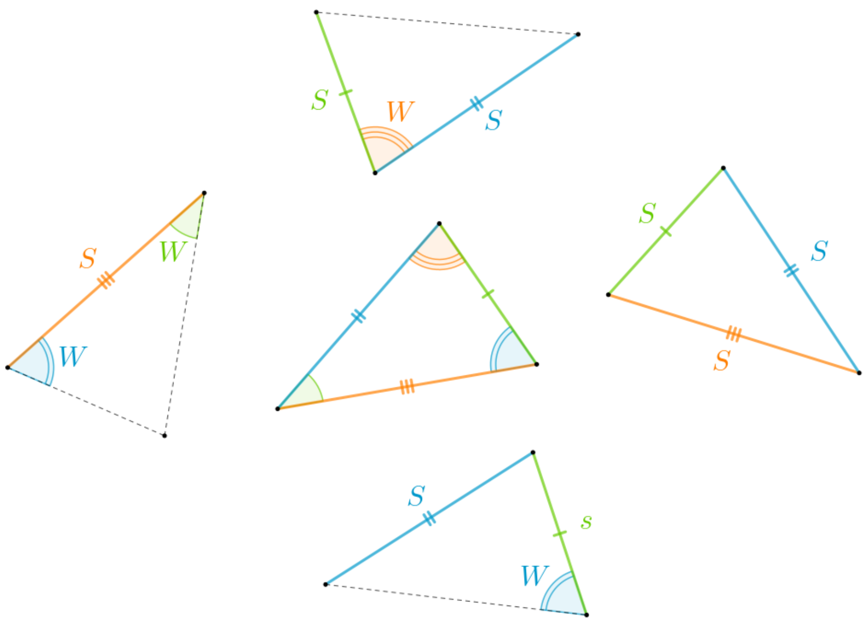
Zwei Dreiecke stimmen in allen Seiten und Winkeln überein, wenn sie

[SWS] in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen,

[WSW] in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen,

[SSS] in allen drei Seiten übereinstimmen,

[SsW] in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.



Mithilfe von kongruenten Dreiecken lassen sich wiederum viele andere geometrische Sätze beweisen – zum Beispiel der

Basiswinkelsatz:

Wenn in einem Dreieck ΔABC die beiden *Schenkel* $|\overline{AC}|$ und $|\overline{BC}|$ gleich groß sind, dann sind auch die beiden *Basiswinkel* $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ gleich groß.

(a) Beweise den Basiswinkelsatz.
Zeichne die Winkelhalbierende im Punkt C ein und weise die Kongruenz der dadurch entstehenden Dreiecke nach.

(b) Formuliere die Umkehrung des Basiswinkelsatzes und beweise sie.

2. Mittelparallelen

Es sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt.

(a) Begründe, dass es nur einen einzigen Punkt P_g auf der Geraden gibt, sodass die Strecke $\overline{PP_g}$ senkrecht auf g steht.
Nimm an, es gäbe zwei solche Punkte und führe das zu einem Widerspruch.

> Wir definieren den *Abstand* des Punktes P zur Geraden g als die Länge der Strecke $\overline{PP_g}$. Diese Strecke wird auch *Lot* von P auf g und der Punkt P_g *Lotfußpunkt* von P auf g genannt.

Es sei Q ein weiterer Punkt auf derselben Seite und mit demselben Abstand von g wie P.

(b) Beweise, dass die Gerade durch P und Q parallel zu g ist.
Nutze unter anderem die Umkehrung des Wechselwinkelsatzes: Wenn zwei Wechselwinkel an geschnittenen Geraden gleich groß sind, dann sind die Geraden parallel.

Es seien g und h zwei parallele Geraden. Die *Mittelparallele* von g und h ist diejenige Gerade, die alle Punkte zwischen g und h enthält, die von diesen beiden Geraden denselben Abstand haben.

(c) Beweise, dass die Mittelparallele der parallelen Geraden g und h die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten P (auf g) und Q (auf h) halbiert.

Damit können wir nun einen zentralen Satz der Dreiecksgeometrie beweisen:

> **Satz von den Mittelparallelen im Dreieck:**
> In einem Dreieck ist die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten stets parallel zur dritten Dreiecksseite und stets halb so lang wie diese.

(d) Beweise mithilfe der Aussage aus (c) den ersten Teil dieses Satzes und begründe mit deinem Wissen über Parallelogramme den zweiten Teil.

3. Der Satz von Varignon

(a) Zeichne verschiedene Vierecke und verbinde jeweils die Mittelpunkte der vier Seiten miteinander. Was fällt dir auf? Formuliere deine Beobachtung als Vermutung.

(b) Beweise deine Vermutung.
Versuche den Satz von den Mittelparallelen im Dreieck zu nutzen.