



## 1. Zum Reinkommen

Wir konstruieren die Zahl

$$122333444 \dots 4545,$$

indem wir für  $n = 1, \dots, 45$  die  $n$ -te natürliche Zahl  $n$  mal anhängen.

Wie viele *Ziffern* hat diese Zahl?

## 2. Frohe neue Jahreszahl!

Die (Jahres-)Zahl

$$2025 = 45^2$$

hat viele interessante Eigenschaften, die wir genauer untersuchen können:

(a)\* In der Primfaktorzerlegung

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2$$

kommen die Ziffern von 2 bis 5 jeweils einmal vor.

Findest du eine Darstellung von 2025, in der die Ziffern von 0 bis 7 jeweils einmal vorkommen?

(b)\* Wer im Jahr 1980 geboren ist, wird im Jahr  $2025 = 45^2$  genau 45 Jahre alt.

Wann ist es (nach 2025) das nächste Mal möglich, dass jemand in dem Jahr lebt, das die Quadratzahl seines Alters ist? Wann war das (vor 2025) zuletzt möglich?

(c)\*\* Es gilt

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 2025 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3.$$

Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

*Hinweis: Du darfst benutzen, dass  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$  gilt.*

(d)\*\* Addiert man die ersten 45 ungeraden Zahlen, erhält man die Summe

$$1 + 3 + 5 + \dots + 87 + 89 = 2025 = 45^2.$$

Formuliere diesen Zusammenhang für beliebige natürliche Zahlen und beweise ihn induktiv.

(e)\*\*\* Es gilt auch

$$(20 + 25)^2 = 2025.$$

Bis zum Jahr 9999 wird es nur noch zweimal der Fall sein, dass sich eine Jahreszahl auf diese Weise darstellen lässt.

Finde diese beiden Jahreszahlen und beweise, dass es keine anderen gibt.

(f)\*\* Wir wissen schon aus Aufgabenteil (c), dass gilt:

$$2025 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3.$$

Zeige die Richtigkeit dieser Gleichung zeichnerisch, indem du das  $45 \times 45$ -Quadrat mit jeweils  $n$   $n \times n$ -Quadraten (für  $n = 1, \dots, 9$ ) ausfüllst, d. h. mit einem  $1 \times 1$ -Quadrat, zwei  $2 \times 2$ -Quadraten, drei  $3 \times 3$ -Quadraten, [...] und neun  $9 \times 9$ -Quadraten.

