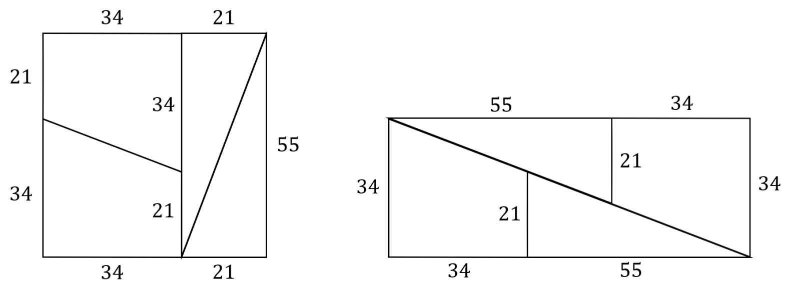
Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt

1. Was geht hier vor?

Durch Umsortieren entsteht aus dem Quadrat links das Rechteck rechts. Beide haben also denselben Flächeninhalt – oder?



(a) Berechne die Flächeninhalte der beiden Figuren.
Ersetze dann die drei Fibonacci-Zahlen 21, 34 und 55 durch die drei Fibonacci-Zahlen 34, 55 und 89 und berechne die Flächeninhalte erneut. Was fällt dir auf?

(b) Bestimme die beiden Flächeninhalte für allgemeine Zahlen x, y und $x+y$. Was muss für das Verhältnis $\frac{x}{y}$ gelten, damit beide Figuren denselben Flächeninhalt haben?

2. Kettenbruch

Wir wissen schon, dass für den Goldenen Schnitt $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$ gilt: $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Damit können wir φ mithilfe eines *Kettenbruchs* annähern:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}} = \ldots.$$

(a) Berechne die ersten 7 Folgenglieder der Folge, die mit $\varphi_1 = 1$ beginnt und für die dann immer $\varphi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\varphi_n}$ gilt. Schreibe das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch. Was fällt dir auf?

(b) Bei dem wievielten Iterationsschritt hat man φ auf drei Nachkommastellen genau angenähert?

3. Die Formel von Moivre-Binet

In Aufgabe 2 haben wir gesehen, dass wir den Goldenen Schnitt φ durch die Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen F_n und F_{n+1} annähern können. Nun versuchen wir umgekehrt, die n-te Fibonacci-Zahl F_n mithilfe des Goldenen Schnitts φ zu berechnen.

(a) Berechne mithilfe der Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$ die Potenzen $\varphi^3, \varphi^4, \varphi^5$ und forme die Ergebnisse so um, dass sie außer φ selbst keine Potenzen von φ mehr enthalten. Was fällt dir auf?

(b) Beweise die Gleichung

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1}$$

mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.
Erinnerung: Die ersten Fibonacci-Zahlen sind $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$. Anschließend gilt immer $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

(c*) Wir wissen schon, dass die quadratische Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$ die beiden Lösungen $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hat. Wegen (b) gilt aber auch allgemein

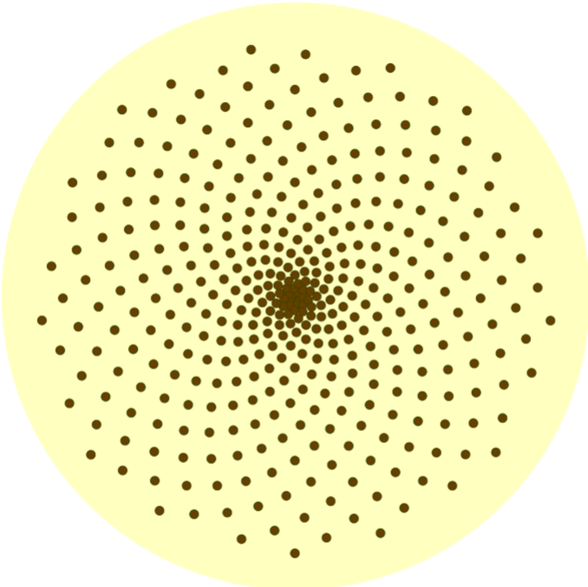
$$\text{I. } \varphi_1^n = F_n \cdot \varphi_1 + F_{n-1} \quad \text{und} \quad \text{II. } \varphi_2^n = F_n \cdot \varphi_2 + F_{n-1}$$

Leite aus diesen beiden Gleichungen eine explizite Formel für F_n her.

4. Die Phyllotaxis der Sonnenblume

Teilt man den Vollwinkel $\alpha = 360°$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts, erhält man die beiden „Goldenen Winkel" $\alpha_1 = \frac{360°}{\varphi} \approx \frac{360°}{1.618} \approx 222.5°$ und $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 = 137.5°$.

Die Kerne von Sonnenblumen wachsen von innen nach außen mit einem Versatz von jeweils $\alpha_1 = 225.5°$. Dabei entsteht das folgende Muster, die sogenannte *Phyllotaxis*:



Findest du in der Phyllotaxis der Sonnenblume die Fibonacci-Zahlen wieder?