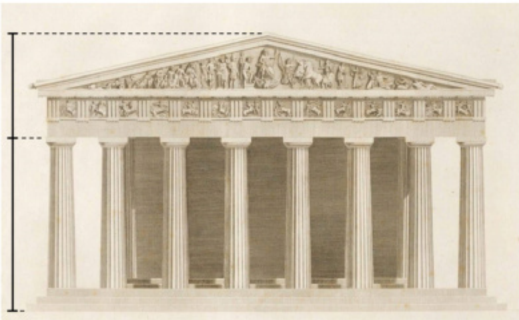
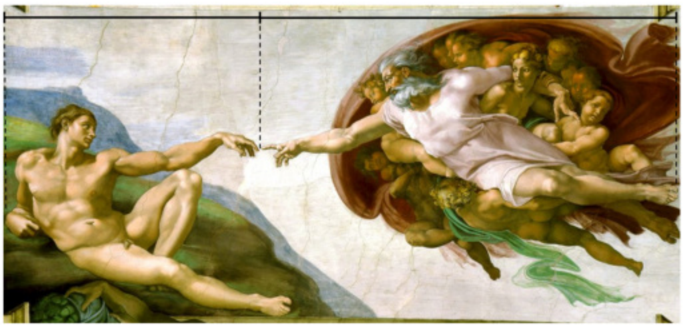
MSG-Zirkel 9b | 23. Januar 2025

Der goldene Schnitt

1. Architektur, Kunst und Geometrie

Viele Gebäude und Kunstwerke, vor allem aus der Antike und der Renaissance, sind nach einem bestimmten Teilungsverhältnis konstruiert, dem sogenannten *Goldenen Schnitt*: Das Verhältnis der Gesamtstrecke zur größeren Teilstrecke entspricht dabei genau dem Verhältnis der größeren Teilstrecke zur kleineren.





Teilt man eine beliebige Strecke nach dem Goldenen Schnitt in eine längere Teilstrecke der Länge x und eine kürzere Teilstrecke der Länge y, gilt also

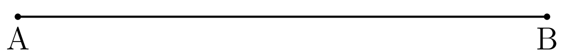
$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} =: \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\varphi = \qquad\qquad}$$

In der Mathematik wird diese Zahl φ auch selbst als Goldener Schnitt bezeichnet.

(a) Bestimme φ mithilfe der obigen Verhältnisgleichung.
Tipp: Zeige, dass $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ *gilt und stelle diese Gleichung dann nach* φ *um.*

(b) Führe die folgenden Schritte durch, um eine gegebene Strecke AB im Goldenen Schnitt zu teilen:

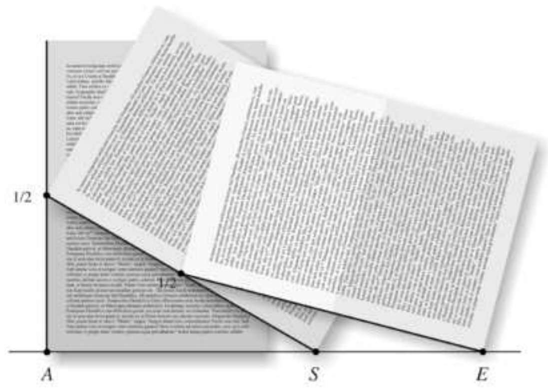
1. Konstruiere den Mittelpunkt M von AB und die Senkrechte zu AB in B.
2. Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius $|BM|$. Ein Schnittpunkt dieses Kreises und der Senkrechten heiße C.
3. Zeichne die Strecke AC.
4. Zeichne einen Kreis um C mit dem Radius $|CB|$. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Strecke AC heiße D.
5. Zeichne einen Kreis um A mit Radius $|AD|$. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Strecke AB heiße T.



Beweise, dass der Punkt T die Strecke AB im Goldenen Schnitt teilt.
Hinweis: Du darfst vereinfachend davon ausgehen, dass $|AB| = 1$ *ist.*

2. Nach einer Idee von Jo Niemeyer

Wir markieren jeweils die Mitte von drei rechteckigen Papierblättern des gleichen Formats durch Falten. Dann legen wir die drei Blätter wie rechts abgebildet aus.



Zeige, dass der Punkt S die Strecke AE im Goldenen Schnitt teilt.
Tipps: Strahlensatz oder ähnliche Dreiecke, Satz des Pythagoras

3. Auf den Spuren des Pentagramms

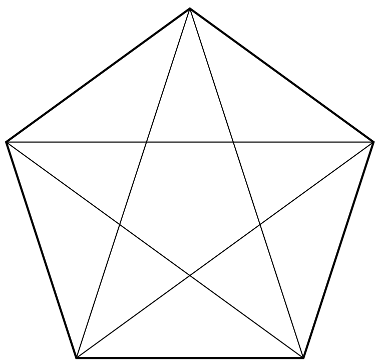
Als *Goldenes Dreieck* wird ein gleichschenkliges Dreieck bezeichnet, bei dem die Längen der Schenkel zur Basis im Verhältnis des Goldenen Schnitts $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ stehen.

(a) Das Dreieck ΔABC sei ein Goldenes Dreieck mit der Basis AB der Länge 1. Die Winkelhalbierende in A schneide die Dreiecksseite BC im Punkt D.

Zeichne ΔABC und bestimme die Längen der Seitenabschnitte BD und DC.

(b) Ermittle die Größen aller Innenwinkel im Goldenen Dreieck ΔABC.

(c) Wenn man in ein regelmäßiges Fünfeck alle Diagonalen einzeichnet, entsteht ein sogenanntes *Pentagramm*:



Beweise, dass die Länge der Diagonalen zur Länge der Seiten im Verhältnis des Goldenen Schnitts stehen.

4. Eine goldene Pyramide?

Die große Cheopspyramide von Gizeh hatte ursprünglich die Grundseitenlänge $s = 230.36\,\text{m}$ und die Höhe $h = 146.5\,\text{m}$. Einige Pyramidologen vertreten die φ-Hypothese:
Die Cheopspyramide sei genau so konstruiert, dass die Höhe d eines Seitendreiecks zur halben Grundseitenlänge $\frac{s}{2}$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts steht.

(a) Bestimme das in der φ-Hypothese beschriebene Verhältnis $d : \frac{s}{2}$. Ist die Hypothese plausibel?

(b) Einer anderen Hypothese zufolge ist die Cheopspyramide so konstruiert, dass die Seitenflächen genau so groß wie das Quadrat über der Höhe sind.

In welchem Verhältnis stünden d und $\frac{s}{2}$, falls diese Hypothese zuträfe?