Landkarten färben

1. Karten kolorieren I

Färbe die folgenden Landkarten *mit möglichst wenigen Farben* so ein, dass keine zwei angrenzenden Länder die gleiche Farbe erhalten.

Hinweis: Du kannst diese Aufgabe auch online bearbeiten:
`https://de.mathigon.org/course/graph-theory/map-colouring`

2. Graphen und der Satz von Euler

Wir können eine ebene Landkarte als planaren Graphen auffassen, in dem jedes Land ein Knoten ist und benachbarte Länder durch Kanten miteinander verbunden werden.

(a) Stelle die Karte der deutschen Bundesländer Schritt für Schritt als Graph dar. Der vorgegebene Knoten soll das Land Berlin darstellen. Dabei darfst du in jedem Schritt eines der folgenden Dinge tun:

(i) Füge einen neuen Knoten hinzu und verbinde ihn mit einer Kante mit einem bestehenden Knoten.

(ii) Füge eine Kante zwischen zwei bestehenden Knoten ein.
Hinweis: Kanten dürfen sich in einem planaren Graphen nicht schneiden.

Fülle dabei außerdem in jedem der ersten fünf Schritte die Tabelle aus, wobei die den Graph umgebende Fläche mitzählt.

# Knoten	# Kanten	# Flächen	$N-K+F$
1	0	1	2

Offenbar gilt hat jeder planare Graph die *Euler-Charakteristik* $N - K + F = 2$.

(b) Erkläre kurz, inwiefern Aufgabe (a) ein induktiver Beweis dieser Aussage ist.

Mithilfe dieser Aussage können wir einen Hilfssatz, ein sogenanntes *Lemma*, beweisen:

> **Lemma**
> *Jeder planare Graph enthält mindestens einen Knoten mit höchstens fünf Kanten.*

(c) Versuche, ein Gegenbeispiel zu konstruieren, d. h. einen Graphen zu zeichnen, in dem alle Knoten mindestens sechs Kanten haben. Was geht schief?

Nun zum Beweis:

(d) Begründe anschaulich, dass in jedem planaren Graphen $3F \leq 2K$ gilt.
Hinweis: Zeichne Pfeile von jeder Kante in alle anliegenden Flächen und vergleiche die Anzahl der Pfeile mit der Anzahl der Flächen und der Anzahl der Kanten.

(e) Beweise nun mithilfe von (d) und der Euler-Charakteristik, dass niemals alle Knoten sechs oder mehr Kanten haben können.
Hinweis: Zeige, dass nicht $K \geq 3N$ gelten kann.

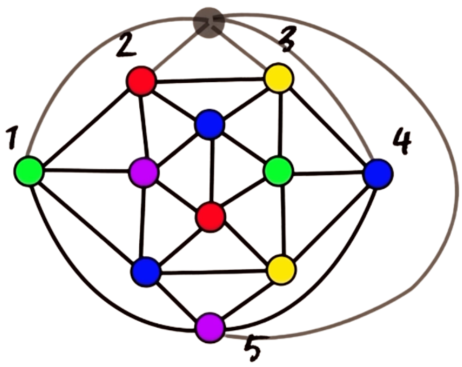
3. Wie viele Farben brauchen wir denn nun?

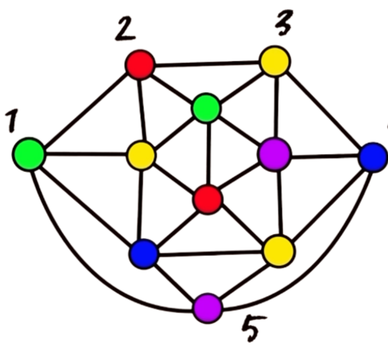
Eine erste Abschätzung können wir nun vergleichsweise leicht beweisen.

(a) Beweise mittels vollständiger Induktion und des obigen Lemmas, dass man zum gültigen Färben einer Karte mit n Ländern höchstens *sechs* Farben benötigt.

Hinweis zum Induktionsschritt: Wir können in einem Graphen mit $n + 1$ Knoten einen Knoten entfernen, um dann die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können. Welcher sollte das sinnvollerweise sein?

Der Beweis funktioniert in dieser Form aber offensichtlich nicht mehr, wenn uns nur *fünf* Farben zur Verfügung stehen. Aber mit etwas Arbeit können wir ihn retten. Dazu betrachten wir die folgenden beiden Beispielgraphen:





Im linken Graphen können wir Knoten 1 und 3, im rechten Graphen die Knoten 2 und 4 gleich färben und haben das Problem gelöst.

(b) Begründe, dass wir die Nachbarn des zuvor entfernten Knotens *immer* so umfärben können, dass wir nur vier verschiedene Farben für sie brauchen.
Hinweis: Betrachte für je zwei Paare der fünf Nachbarknoten die beiden Teilgraphen, die nur Knoten in diesen beiden Farben enthalten.

Tatsächlich benötigt man zum gültigen Färben einer Landkarte sogar nur *vier* Farben – bis heute gibt es aber keinen elementaren (sondern nur einen 400-seitigen Computergestützten) Beweis für diesen sogenannten *Vier-Farben-Satz*.

4. Karten kolorieren II

Färbe die Karte Englands mit vier Farben so ein, dass keine zwei benachbarten Counties dieselbe Farbe erhalten.