Die Fibonacci-Zahlen

1. Kaninchenzucht und Bienenvolk

(a) Leonardo von Pisa, „Fibonacci" genannt, beschrieb das Wachstum einer Kaninchenpopulation so:

- Zu Beginn (im 1. Monat) gibt es ein Paar neugeborener Kaninchen.
- Jedes neugeborene Kaninchenpaar wirft nach 2 Monaten zum ersten Mal und anschließend jeden Monat ein neues Paar.
- Kaninchen leben ewig.

Aus wie vielen Kaninchenpaaren besteht die Population im 10. Monat?

(b) In einem Bienenvolk haben dagegen nicht alle Bienen zwei Elternteile:

- Aus den befruchteten Eiern der Königin entstehen Weibchen.
  Weibliche Bienen haben also eine Mutter und einen Vater.
- Aus den unbefruchteten Eiern der Königin entstehen dagegen Männchen.
  Männliche Bienen haben also nur eine Mutter und keinen Vater.

Wie viele Ur-Ur-Ur-Großeltern hat die (männliche) Biene Willy?

(c) Es sei W_n die Zahl der weiblichen, M_n die Zahl der männlichen und $B_n := W_n + M_n$ die Gesamtzahl aller Bienen in der n-ten Generation vor Willy.

Beweise, dass $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$ gilt.

Definition: Die Folge mit den Folgengliedern

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

heißt *Fibonacci-Folge*. Die n-te *Fibonacci-Zahl* F_n ist dabei die Summe der beiden vorherigen Fibonacci-Zahlen, d. h. es gilt

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_n := F_{n-1} + F_{n-2}.$$

2. Die Zeckendorf-Repräsentation

Der niederländische (Amateur-)Mathematiker Edouard Zeckendorf hat eine interessante Analogie zwischen Fibonacci-Zahlen und Primzahlen entdeckt:

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann (eindeutig) als Summe voneinander verschiedener, nicht direkt aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen dargestellt werden. Diese Darstellung heißt *Zeckendorf-Repräsentation* $\mathrm{ZR}(n)$.

(a) Ergänze in der folgenden Tabelle die Zeckendorf-Repräsentationen der natürlichen Zahlen von 1 bis 11.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathrm{ZR}(n)$											

(b) Bestimme die Zeckendorf-Repräsentation von 2025.

(c) Wir wissen, dass die Zahlen von 1 bis 11 eine Zeckendorf-Repräsentation besitzen.

Wäre die Zahl $N = 12$ selbst eine Fibonacci-Zahl, hätte sie die Zeckendorf-Repräsentation $\mathrm{ZR} = N$.
Da $N = 12$ aber keine Fibonacci-Zahl ist, liegt sie zwischen zwei Fibonacci-Zahlen, nämlich zwischen $F_6 = 8$ und $F_7 = 13$:

$$8 < 12 < 13.$$

Nun betrachten wir die Zahl

$$a := 12 - 8 = 4.$$

Die Zahl a ist eine natürliche Zahl, die kleiner ist als 12. Also besitzt a nach Voraussetzung eine Zeckendorf-Repräsentation $\mathrm{ZR}(a) = 3 + 1$. Diese kann dabei auf keinen Fall die Zahl 5 enthalten, da gilt:

$$4 = 12 - 8 < 13 - 8 = 5.$$

Daher ist

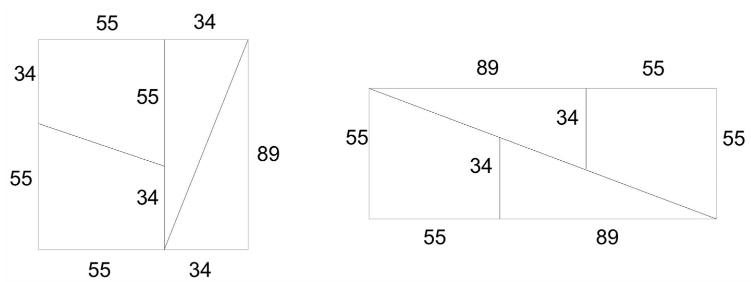
$$\mathrm{ZR}(12) = 8 + (3 + 1)$$

eine Zeckendorf-Repräsentation von 12.

Formuliere diesen Beweis auf der rechten Seite allgemein (d. h. ohne konkrete Werte), um zu beweisen, dass *jede* Zahl $N \in \mathbb{N}_{\geq 12}$ eine Zeckendorf-Repräsentation besitzt. Du darfst dabei benutzen, dass jede Zahl, die kleiner ist als N, eine Zeckendorf-Repräsentation besitzt.

3. Die Cassini-Identität

(a) Durch Umsortieren entsteht aus dem linken Quadrat das rechte Rechteck. Beide haben also denselben Flächeninhalt – oder?



(b) Ersetze die drei Fibonacci-Zahlen 34, 55 und 89 durch die drei Fibonacci-Zahlen 21, 34 und 55 und berechne die Flächeninhalte erneut. Was fällt dir auf?

(c)* Formuliere deine Beobachtung aus (b) als allgemeine Behauptung und beweise sie mittels vollständiger Induktion.