Zusatzaufgabe 49∗ (7 Punkte): (*die geometrische Reihe*)

(a) Berechne die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{65536}$.

(b) Sei nun q eine rationale Zahl. (Zum Beispiel ergibt sich für $q = \frac{1}{2}$ Teilaufgabe (a)) Beweise, dass die folgende Gleichheit für eine endliche Summe von Termen gilt:

$$1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \qquad (1)$$

Hinweis: Schreibe $1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = x$, multipliziere diese Gleichung mit q und ziehe die beiden Gleichungen voneinander ab. Es ergibt sich dann der behauptete Wert für x.

(c) Falls q eine rationale Zahl mit $|q| < 1$ ist, welchem Wert nähert sich dann die rechte Seite von Gleichung (1) für sehr großes n an? (ohne Beweis)

Was bedeutet das für die *unendliche* Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$?

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 1 - \frac{1}{4}, \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 1 - \frac{1}{8}, \\
&\dots \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{65536} &= 1 - \frac{1}{65536} = \frac{65535}{65536}.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis folgt auch ohne Rechnung aus Aufgabenteil (b).

(b) Wir schreiben

$$1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = x. \qquad (2)$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit q und erhalten

$$q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} = qx. \qquad (3)$$

Wir subtrahieren nun Gleichung 2 von Gleichung 3 und erhalten

$$\begin{aligned}
& (q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}) - (1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n) = qx - x \\
\Rightarrow \quad & q^{n+1} - 1 = (q - 1)x
\end{aligned}$$

und Division beider Seiten durch $(q - 1)$ liefert die Behauptung.

(c) Falls $|q| < 1$ ist, so ist q^n sehr klein für sehr großes n. Folglich näher sich die rechte Seite von Gleichung 1 für großes n der Zahl $\frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ an. D.h. auch die linke Seite der Gleichung nähert sich diesem Wert an, also ist

$$1 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}.$$

(Man muss eigentlich genau definieren, was das Gleichheitszeichen hier bedeuten soll, schließlich steht auf der linken Seite eine unendliche Reihe und keine Zahl. Darauf verzichten wir hier aber und verstehen die Schreibweise nur anschaulich.)

Aufgabe 50 (4 Punkte): (*die harmonische Reihe*)
Beweise, dass der Ausdruck $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ mit zunehmender Anzahl Summanden unendlich groß wird.
Hinweis: Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Setzt sich dieses Muster so fort? Warum? Wir haben $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$, *was bedeutet das für den Wert der Ausgangsreihe?*

In der unendlichen Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ markieren wir die Zahl $\frac{1}{2}$ und darauffolgend Gruppen mit immer doppelt so vielen Summanden wie die vorige Gruppe, d.h.:

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\frac{1}{17}+\dots$$

Wir bemerken dabei: Der letzte Summand der n-ten Gruppe hat den Wert $\frac{1}{2^n}$. Alle anderen Summanden der Gruppe sind größer als der letzte Summand der Gruppe. Die n-te Gruppe enthält 2^{n-1} Summanden. Das heißt die Summe der n-ten Gruppe ist $\geq 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$. Das heißt, in dieser Zahlenreihe addieren wir unendlich oft den Wert $\frac{1}{2}$. Der Wert der Zahlenreihe wird also beliebig groß.