Aufgabe *Zahl erraten mit Informationen über Summe und Produkt*

Ein Professor verkündet während einer Zahlentheorie-Vorlesung, dass er sich vor Beginn zwei Zahlen zwischen 1 und 100 (d.h. größer als 1 und kleiner als 100) ausgedachte habe. Außerdem habe er einem Studenten A das Produkt der beiden Zahlen, einem anderen Studenten B die Summe der beiden Zahlen genannt.

Die beiden Studenten unterhalten sich daraufhin lautstark:

A: “Ich kenne die beiden Zahlen nicht.”
B: “Das wusste ich doch.”
A: “Damit kenne ich die beiden Zahlen jetzt.”
B: “Dann kenne ich sie jetzt auch.”

Und mit der letzten Bemerkung waren natürlich dem gesamten Hörsaal beide Zahlen bekannt. Wie lauten die beiden Zahlen?

Seien x, y die gesuchten Zahlen. Es sei P das Produkt der beiden Zahlen, dass dem Studenten A bekannt ist. Es sei S die Summe der beiden Zahlen, die dem zweiten Studenten bekannt ist.

Betrachten die erste Aussage A**: “Ich kenne die beiden Zahlen nicht.”**

Wir überlegen uns, in welchen Fällen Student A die beiden Zahlen sofort hätte bestimmen können. A kennt das Produkt der Zahlen und kann damit ihre Primfaktorzerlegung bestimmen.

1a) P lässt sich in genau zwei Primfaktoren zerlegen. Dann sind x, y gerade die beiden gesuchten Zahlen.

1b) Einer der Primfaktoren in der Zerlegung ist größer als 50. Dann muss dieser Faktor bereits eine der beiden gesuchten Zahlen sein. Multipliziert man ihn nämlich mit einem der übrigen Faktoren, so wäre das Produkt größer gleich 100, was der Wahl von x, y widerspricht.
(Betrachte $P = 318 = 2 \cdot 3 \cdot 53$. Es muss hier $x = 53$, $y = 6$ sein. Denn $53 \cdot 2 = 106$ und $53 \cdot 3 = 159$ sind beide größer als 100 und können damit nicht eine der gesuchten Zahlen sein)

Wir wissen also, dass keiner der beiden Fälle vorliegt, denn sonst wäre die Zahl dem Studenten A ja bekannt! Wir wissen also: Die Primfaktorzerlegung von P liefert mindestens 3 Faktoren, die alle kleiner als 50 sind.

Betrachten nun die nächste Aussage: **“Das wusste ich doch.”**

Wir erfahren daraus, dass Student B von der Summe S darauf schließen konnte, dass die Primfaktorzerlegung von $x \cdot y$ mindestens 3 Faktoren enthält, die alle kleiner als 50 sind. Das schließt nun aber bereits viele Werte für S aus:

2) $S > 54$ ist nicht möglich. Wäre nämlich $S > 54$, so besteht die Möglichkeit, dass einer der beiden Summanden eine Primzahl zwischen 53 und 97 ist.
   (Wäre z.B. $S = 61$, so besteht die Möglichkeit, dass $x = 53$ und $y = 8$, wodurch Student A beide Zahlen sofort ermitteln könnte)

Wir prüfen nun für alle S von 2 bis 53, ob sie als Summe von genau zwei Primzahlen darstellbar sind. Ist ein S nämlich als Summe von zwei Primzahlen darstellbar, so kann sich Student B nicht sicher sein, dass x und y nicht zufällig gerade genau diese Primzahlen sind und diese scheiden aus unserer Betrachtung aus. (Falls dies nämlich der Fall ist, so kann A ja die beiden Zahlen bestimmen!)

$4 = 2 + 2$	$5 = 2 + 3$
$6 = 3 + 3$	$7 = 2 + 5$
$8 = 3 + 5$	$9 = 2 + 7$
$10 = 3 + 7$	11
$12 = 5 + 7$	$13 = 2 + 11$
$14 = 3 + 11$	$15 = 2 + 13$
$16 = 3 + 13$	17
$18 = 5 + 13$	$19 = 2 + 17$
$20 = 3 + 17$	$21 = 2 + 19$
$22 = 3 + 19$	23
$24 = 5 + 19$	$25 = 2 + 23$
$26 = 3 + 23$	27
$28 = 5 + 23$	29
$30 = 7 + 23$	$31 = 2 + 29$
$32 = 3 + 29$	$33 = 2 + 31$
$34 = 3 + 31$	35
$36 = 5 + 31$	37
$38 = 7 + 31$	$39 = 2 + 37$
$40 = 3 + 37$	41
$42 = 5 + 37$	$43 = 2 + 41$
$44 = 3 + 41$	$45 = 2 + 43$
$46 = 3 + 43$	47
$48 = 5 + 43$	$49 = 2 + 47$
$50 = 3 + 47$	51
$52 = 5 + 47$	53
$54 = 7 + 47$	

Es bleiben also nur die Zahlen *11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53* als mögliche Kandidaten für S. (Tatsächlich hätte es auch nach der *Goldbachschen Vermutung* genügt, die ungeraden S zu überprüfen)

Wir sehen, dass alle diese möglichen Werte ungerade sind. Wissen daher, dass x gerade, y ungerade sein muss. Außerdem sind beide kleiner als 53.

Betrachten weiter die dritte Aussage: **"Damit kenne ich die beiden Zahlen jetzt."**

Es muss uns klar sein, dass an dieser Stelle Student A ebenfalls weiß, was wir wissen. Dass nämlich die Summe S nur eine der o.g. Zahlen sein kann.

Aus der ersten Aussage wissen wir, dass Student A sein Produkt P auf mehrere Arten in zwei Faktoren zerlegen kann. Unter diesen Zerlegungen gibt es aber anscheinend nur eine Zerleung, deren Summe eine der obigen Zahlen ist.
(Würde der Student zum Beispiel das Produkt $52 = 13 \cdot 4 = 26 \cdot 2$ kennen, so wüsste er, dass die Lösung $x = 13$, $y = 4$ lautet. Es ist nämlich $13 + 4 = 17$ eine erlaubte Summe, wohingegen $26 + 2 = 28$ eine *nicht* erlaubte Summe ist und damit als Lösung nicht in Frage kommt)

Betrachten nun die letzte Aussage: **"Dann kenne ich sie jetzt auch."**

Auch Student B hat das Wissen, das wir haben. Er weiß: Die Faktorisierung von P ist nicht eindeutig, aber nur in einem Fall ist die Summe der Faktoren eine der obigen Zahlen.

An dieser Stelle kennt Student B die gesuchten Zahlen. Folgende Möglichkeiten für S scheiden daher aus:

4a) Alle $S \geq 35$. Ein solches S lässt sich nämlich zerlegen in $29 + a$ und auch in $31 + b$. Student A wäre dann das Ergebnis bekannt, weil nämlich 29 bzw. 31 mit Sicherheit eine der gesuchten Zahlen ist. Student B kann in so einem Fall also x und y nicht kennen!
(Sei z.B. $x = 6$, $y = 31$. Also auch $P = 186$. Student A kann in dem Fall die Lösung bestimmen. Denn es ist z.B. $x = 3$ und $y = 62$ nicht möglich, weil die Summe dieser beiden Zahlen zu groß für einen möglichen Kandidaten ist.
Student B kann sich bei $S = 37$ nicht sicher sein: Student A hat das Ergebnis zwar ermittelt, aus der Sicht von B sind trotzdem noch die zwei Lösungen $x = 6$, $y = 31$ und $x = 8$, $y = 29$ möglich)

4b) 29 scheidet aus, denn: $29 = 13 + 16 = 17 + 12$. Für beide Zerlegungen könnte A die gesuchten Zahlen bestimmen. (Liegt $x = 13$, $y = 16$ vor, so kennt A ihr Produkt und weiß, dass es nur genau diese Möglichkeit gibt, sodass eine Zahl gerade, die andere ungerade ist)
Mit seinem Wissen von S allein kann B jedoch das Ergebnis nicht bestimmen.

4c) 27 scheidet aus, denn: $27 = 23 + 4 = 19 + 8$.

4d) 23 scheidet aus, denn: $23 = 19 + 4 = 16 + 7$.

4e) 11 scheidet aus, denn: $11 = 7 + 4 = 7 + 16$.

Es bleibt als einziger möglicher Wert $S = 17$. Und durch Nachprüfen jeder einzelnen Zerlegung von 17 erfahren wir: $x = 13$, $y = 4$. So kann A nämlich von P aus o.g. Gründen auf die Lösung schließen. Bei allen anderen Zerlegungen (z.B. $17 = 6 + 11$) könnte A die Lösung nicht bestimmen. $(6 \cdot 11 = 2 \cdot 33 = 66)$