

**Tag der Mathematik Trainingslager**  
**Themenkomplex 1: Geschickt Gleichungen aufstellen**

Bei vielen Aufgaben lohnt es sich, die Aufgabenstellung in eine Gleichung (oder mehrere Gleichungen) zu überführen. Ob diese Gleichungen dann am Ende hilfreich sind, weiß man natürlich vorher nicht. Allerdings ist es meistens leichter eine Gleichung zu lösen, als irgendein abstraktes mathematisches Problem. Außerdem gibt es für ein gutes Gleichungssystem auch ohne Lösung schon einen Großteil der Punkte.

Eine gute Faustregel ist: Es sollte höchstens so viele Unbekannte wie Gleichungen geben. Manchmal hängt die Aufgabenstellung noch von einem Parameter ab, dann ist dieser noch als zusätzliche Unbekannte erlaubt.

**Beispiel:**

Für welche  $k \geq 1$  gibt es  $k$  aufeinander folgende natürliche Zahlen, deren Summe 100 ist?

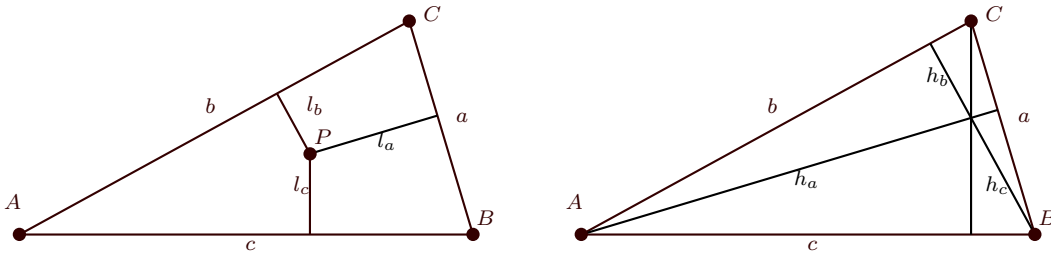
**Tag der Mathematik Trainingslager**  
**Themenkomplex 2: Geometrie**

Sehr häufig sind Aufgaben zur Winkelbestimmung. Das haben wir zu Beginn des Schuljahres geübt (Stufenwinkel, Wechselwinkel, Nebenwinkel, Winkelsumme im Dreieck, Außenwinkelsatz, Zentri-Peripheriewinkelsatz, Gleichungen aufstellen).

Ebenfalls häufig sind Aufgaben zur besonderen Punkten und Linien im Dreieck. Dafür muss man die Definitionen von Winkelhalbierenden, Mittelsenkrechten, Höhen, Seitenhalbierenden, Umkreis, Inkreis, sowie ihre Konstruktion drauf haben!

**Beispiel:**

Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  und ein Punkt  $P$  im Innern des Dreiecks. Die Seitenlängen  $a := |\overline{BC}|$ ,  $b := |\overline{AC}|$  und  $c := |\overline{AB}|$  erfüllen  $a \leq b \leq c$ . Von  $P$  werden die Lote auf die Seiten  $BC$ ,  $AC$  und  $AB$  gefällt, die Längen der Lote werden mit  $l_a$ ,  $l_b$  beziehungsweise  $l_c$  bezeichnet. Schließlich seien  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$  noch die Längen der Höhen von den Eckpunkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf die Seiten  $BC$ ,  $AC$  beziehungsweise  $AB$ . Die Beschriftungen der Lote und Höhen sind in der Abbildung gekennzeichnet.



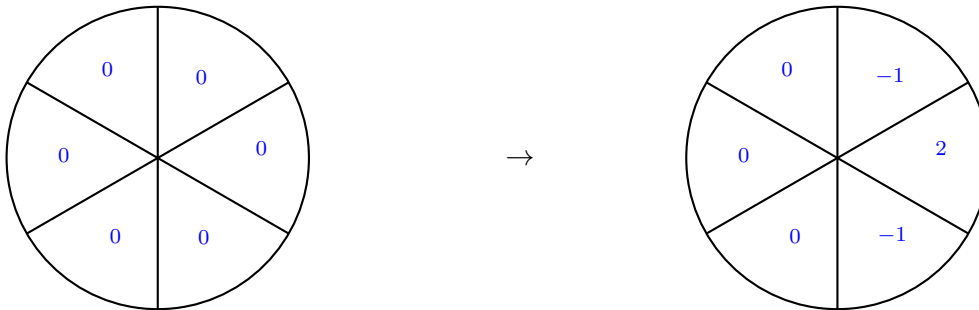
- (a) Zeigt, dass  $h_a \geq h_b \geq h_c$  gilt.
- (b) Zeigt die Ungleichungen  $h_a \geq l_a + l_b + l_c$  und  $l_a + l_b + l_c \geq h_c$ . Findet alle Dreiecke, für die in mindestens einer der beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt, und begründet, dass es keine weiteren gibt.
- (c) Angenommen, es gilt sogar  $a < b < c$ , und  $P$  darf nun auch auf dem Rand des Dreiecks liegen. Findet alle Punkte  $P$ , für die  $l_a + l_b + l_c$  minimal ist, und alle Punkte  $P$ , für die  $l_a + l_b + l_c$  maximal ist. Begründet dabei, dass es keine weiteren solchen Punkte gibt.

*Hinweis: Flächeninhalte auf unterschiedliche Arten berechnen.*

**Tag der Mathematik Trainingslager**  
**Themenkomplex 3: Invarianzprinzip**

Oft wird gefragt, ob ein Verfahren existiert, das einen gewissen Anfangszustand in einen gewissen Endzustand überführt. Falls so ein Verfahren existiert, dann genügt es, dieses durch Ausprobieren zu finden und anzugeben, um die Aufgabe zu lösen. Falls so ein Verfahren aber *nicht* existiert, so muss man einen Beweis dafür angeben, und man kann ja nicht alle Möglichkeiten ausprobieren...

Eine Technik dafür ist, etwas zu finden, das nach jedem Schritt gleich bleibt – eine *Invariante*. Ein (äußerst einfaches) Beispiel dafür ist das folgende: Gegeben sei ein in sechs Segmente unterteilter Kreis und zu Beginn steht in jedem Segment die Zahl 0. In einem Spielzug darf man ein Segment auswählen, die Zahl in diesem Segment um zwei erhöhen und die Zahl in den beiden benachbarten Segmenten um eins verringern.



Kann durch endlich viele Spielzüge erreicht werden, dass in jedem Segment die Zahl 1 steht? Die Antwort lautet hier: Nein! Denn die Summe aller Zahlen beträgt zu Beginn 0 und ein Spielzug ändert diese Summe nicht. Am Ende müsste die Summe aber 6 betragen.

**Beispiel:**

Einige Münzen liegen in einer Reihe, jede zeigt Kopf (*K*) oder Zahl (*Z*). Otto spielt mit ihnen und zwar wählt er immer eine Münze aus und dreht sie und ihre Nachbarn um. Wenn er eine Randmünze ausgewählt hat, dreht er also nur zwei um und sonst immer drei. Das kann zum Beispiel so aussehen:  $KZ\underline{K}KZK \rightarrow KKZZZ\underline{K} \rightarrow KKZZZ\underline{K}Z \rightarrow KKZKZK$  (die unterstrichene Münze ist jeweils die von Otto gewählte).

Kann Otto bei jeder Ausgangssituation erreichen, dass bei allen Münzen der Kopf nach oben weist? Zeigt, dass die Antwort *NEIN* ist, wenn es 5 Münzen sind. Für 6 Münzen aber ist die Antwort *JA*. Was passiert bei  $n$  Münzen?

## Tag der Mathematik Trainingslager

### Themenkomplex 4: Knobelaufgaben

Neben den häufigen Aufgaben zur Aussagenlogik (genau zwei dieser Aussagen sind wahr, Person  $A$  lügt immer und Person  $B$  sagt immer die Wahrheit, usw.) gibt es manchmal auch Aufgaben aus dem Bereich der Graphentheorie, versteckt als Logikaufgaben.

Bei diesen Aufgaben ist es hilfreich, das Problem als Graph aufzumalen – also als ein Bild mit Punkten und Linien, die diese Punkte verbinden. Man muss dann erklären, wofür die Punkte und Linien im Bild stehen und dann die Eigenschaften dieses Graphen untersuchen, was manchmal einfacher als die ursprüngliche Aufgabe ist.

#### Beispiel:

- (a) Gegeben seien 5 Punkte, die ein regelmäßiges Fünfeck bilden. Zwischen je 2 Punkten wird eine Verbindungsstrecke gezogen. Wie viele Strecken sind das?
- (b) Färbt die Strecken so mit den Farben rot und blau, dass jede Strecke genau eine Farbe bekommt und keine 3 der 5 Punkte ein Dreieck mit gleichfarbigen Verbindungsstrecken bilden.
- (c) Ruth hat Geburtstag und lädt zu ihrer Feier mindestens 6 ihrer Freunde ein. Sie stellt fest, dass egal, welche ihrer Freunde sie einlädt, es stets drei von ihnen gibt, die sich gegenseitig kennen, oder es drei von ihnen gibt, die sich paarweise noch nicht kennen. Beweist, dass das kein Zufall ist, das heißt, dass es bei jeder Gruppe von mindestens 6 Menschen darunter stets eine Gruppe bestehend aus drei Personen gibt, die sich entweder paarweise nicht kennen oder sich schon alle gegenseitig kennen.

**Tag der Mathematik Trainingslager**  
**Test-Wettbewerb**

(1.) Wenn man in den Ausdruck

$$\frac{12 \cdot n + 1}{30 \cdot n + 2}$$

für  $n$  eine natürliche Zahl einsetzt, erhält man einen Bruch. Zum Beispiel erhält man für  $n = 3$  den Bruch

$$\frac{12 \cdot 3 + 1}{30 \cdot 3 + 2} = \frac{37}{92}.$$

- (a) Gebt den Bruch für  $n = 1, 2, 4, 5$  konkret an.
- (b) Zeigt, dass die fünf Brüche für  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  jeweils nicht weiter kürzbar sind.
- (c) Beweist, dass der allgemeine Bruch (ganz oben) für *alle* natürlichen Zahlen  $n$  nicht weiter kürzbar ist.
- (2.) (a) Konstruiert ein Dreieck  $\triangle ABC$  mit Umkreisradius  $r = 4\text{cm}$  und Seitenlängen  $b = 4\text{cm}$  und  $c = 7\text{cm}$  ( $c$  ist die Länge der Strecke  $AB$  und  $b$  die Länge der Strecke  $AC$ ) nur mit Zirkel und Lineal. Gebt eine Beschreibung für eure Konstruktion an.
- (b) Bestimmt alle nicht zueinander kongruenten Dreiecke mit Umkreisradius  $r = 4\text{cm}$  und Seitenlängen  $b = 4\text{cm}$  und  $c = 7\text{cm}$ . Beweist, dass alle gefundenen Dreiecke (die eventuell schon mit bloßem Auge als nicht kongruent zueinander erkannt werden können) tatsächlich nicht deckungsgleich sind. Messen ist kein Beweis! Formuliert euren Beweis so, dass er sogar ohne Anfertigung einer Skizze verständlich ist.
- (c) Begründet, dass es keine weiteren, nicht zu den schon gefundenen kongruente Dreiecke mit diesen Eigenschaften gibt.
- (3.) (a) Kann man die neun Felder eines  $3 \times 3$ -Quadrates so mit den Zahlen  $0, 1$  und  $-1$  besetzen, dass die Zeilensumme, die Spaltensummen sowie die beiden (aus je drei Summanden bestehenden) Diagonalsummen alle voneinander verschieden sind?
- (b) Kann man die Zeichen  $+$  und  $-$  so zwischen die folgenden Zahlen

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

schreiben, dass als Ergebnis  $0$  herauskommt?

In beiden Aufgabenteilen ist eine Lösung anzugeben, wenn die Antwort "Ja" ist. Ist die Antwort "Nein", wird eine Begründung erwartet, warum es nicht geht.

– bitte wenden –

- (4.) Vier Ehepaare sind bei einem fünften zu Gast. Beim Eintreffen findet ein allgemeines Händeschütteln statt, bei dem folgendes gilt:
- (a) Niemand gibt sich selbst die Hand.
  - (b) Niemand gibt seinem Ehepartner die Hand.
  - (c) Niemand gibt jemand anderem mehr als einmal die Hand.

Nach dem Händeschütteln fragt der Gastgeber die anderen 9 Personen, wie oft sie insgesamt anderen die Hand gegeben haben. Von jeder Person bekommt er eine andere Zahl zur Antwort.

**Frage:** Welche Zahl antwortet ihm seine Frau?