

Figurierte Zahlen

Teilnehmer:

Conrad Boche	Immanuel-Kant-Gymnasium
Brian Heinze	Herder-Gymnasium
David Klawohn	Immanuel-Kant-Gymnasium
Youngjin Lee	Herder-Gymnasium
Tuan Long Nguyen	Immanuel-Kant-Gymnasium
Robin Simon	Immanuel-Kant-Gymnasium
Jongsung Song	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Sebastian Stübner	Käthe-Kollwitz-Gymnasium

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Elena Schünemann Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Jochen Ziegenbalg Pädagogische Hochschule Karlsruhe



1. Vorbemerkung

Im Folgenden wird die Methode des Arbeitens mit figurierten Zahlen vorgestellt. Auf alternative Methoden (wie z.B. vollständige Induktion, Differenzenfolgen, Differenzengleichungen, Rekursionsgleichungen) wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen.

Wir werden nicht versuchen, streng zu definieren, was unter figurierten Zahlen zu verstehen ist, sondern wir werden das Arbeiten mit figurierten Zahlen anhand von typischen Beispielen exemplarisch erläutern.

2. Einführende Beispiele

2.1. Die Gnomon-Methode

In der Antike wandten die griechischen Mathematiker geometrisches Denken und geometrische Veranschaulichungen oft auch auf arithmetische oder algebraische Sachverhalte an. Sie machten dabei oft von der „Gnomon-Methode“ Gebrauch. Ein *Gnomon* war eine Art Winkelhaken, der auch als Bestandteil von Sonnenuhren bei der Zeitmessung verwendet wurde. Die Gnomon-Methode wird im Folgenden durch vielfältige Beispiele erläutert. Eines der frühesten dokumentierten Beispiele dieser *geometrischen Algebra* findet sich in Euklids Elementen. Ein Zitat aus Buch 2, Proposition 5:

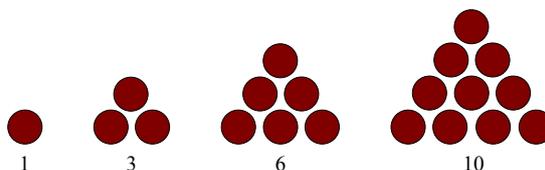
Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich.

In algebraischer Interpretation bringt dieser Satz denjenigen Sachverhalt zum Ausdruck, der heute meist als dritte Binomische Formel bezeichnet wird.

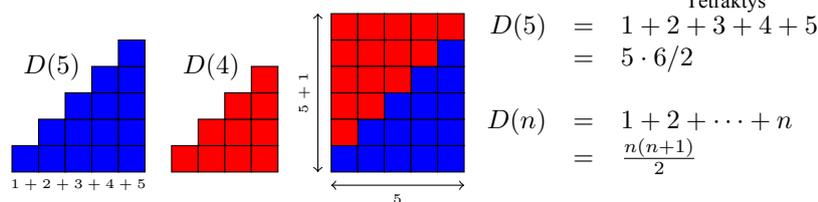
Dreieckszahlen / Triagonalzahlen

Die Dreieckszahlen D_n (gelegentlich auch bezeichnet durch $D(n)$, T_n oder $T(n)$ für *triangular number*) sind die Anzahlen der Punkte in den folgenden Dreiecksmustern.

Also: $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $D_4 = 10$, ...



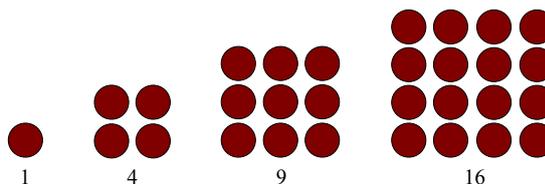
Manchmal kann es günstig sein, die Einheiten der figurierten Zahlen in der Form von Einheitsquadraten statt Punkten zu zeichnen.



Die Summe zweier benachbarter Dreieckszahlen ist stets eine Quadratzahl.
 $D(n) + D(n - 1) = n^2$

Viereckszahlen / Quadratzahlen

Die Viereckszahlen (bzw. Quadratzahlen) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ (allgemein: $Q_n = Q(n) = n^2$) sind die Punkte-Zahlen in den folgenden Quadrat-Mustern:



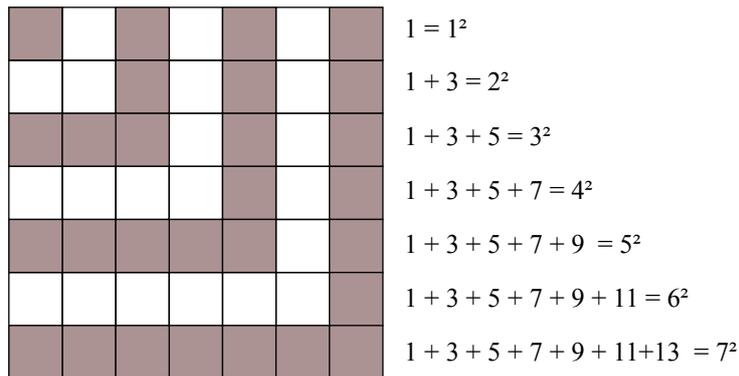
Quadratzahlen, ungerade Zahlen und die Gnomon-Methode

Wir betrachten Summen aufeinanderfolgender ungerader Zahlen (beginnend bei 1):

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots$$

Die folgende Abbildung (figurierte Zahl) macht deutlich, dass diese Summen stets Quadratzahlen ergeben. Jede ungerade Zahl ist um 2 größer als die vorhergehende und ebenso ist jeder Gnomon um 2 größer als der vorhergehende Gnomon.

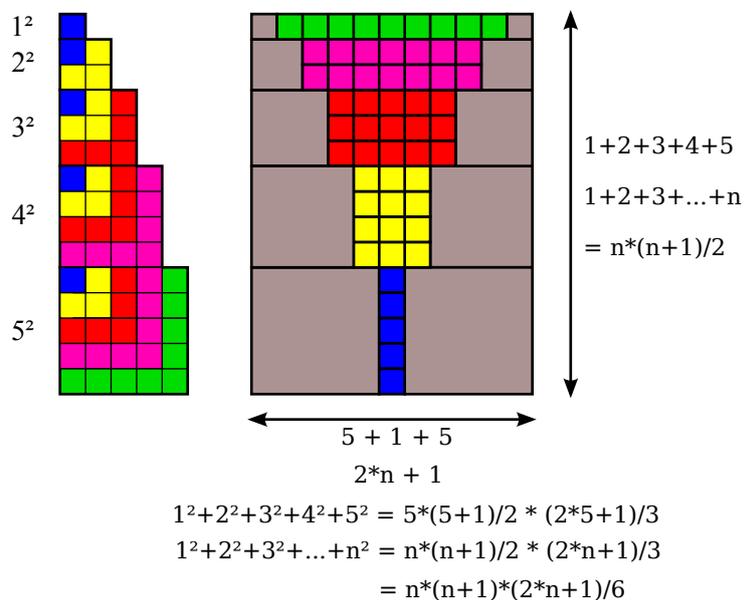
Gnomon



Allgemein ausgedrückt: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = \sum_{i=1}^k (2 \cdot i - 1) = k^2$.

Summen von Quadratzahlen

Die folgende Abbildung dürfte selbsterklärend sein.

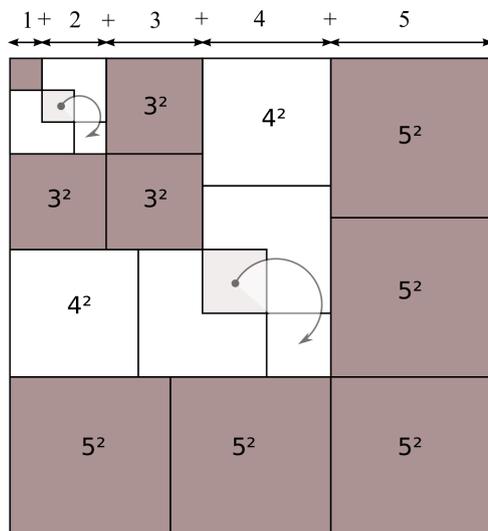


Wir halten fest:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Summen von Kubikzahlen

In der folgenden Abbildung sind die Kubikzahlen als geeignete Vielfache von Quadratzahlen dargestellt.



$$1+2*2^2+3*3^2+4*4^2+5*5^2 = (1+2+3+4+5)^2 = 15^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = (1+2+3+4+5)^2$$

Dies führt zu der folgenden hochgradig symmetrischen Gleichung:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2.$$

3. Polygonalzahlen und Pyramidalzahlen

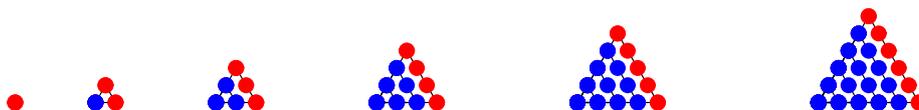
3.1. Polygonalzahlen

Mit $G(E, k)$ werde im Folgenden die Polygonalzahl eines E -Ecks auf der k -ten Stufe bezeichnet ($E \geq 3$).

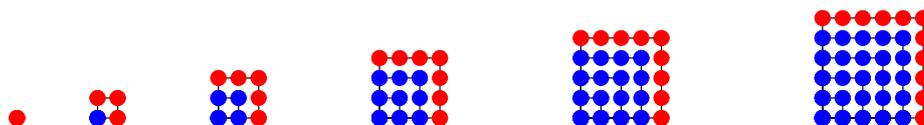
Konstruktion der Polygonalzahlen: In der Stufe $k = 1$ besteht jedes Polygonalzahl-Punktmuster aus genau einem Punkt, d.h. für alle E ist $G(E, 1) = 1$. Es sei nun $k \geq 2$. Das Punktmuster zur Polygonalzahl $G(E, k)$ entsteht aus dem Punktmuster zur Polygonalzahl $G(E, k - 1)$, indem man an $E - 2$ Seiten einen „offenen Kranz“ neuer Punkte so an das alte Punktmuster anlegt, dass die Randpunkte der neuen Figur ein (regelmäßiges) E -Eck bilden, auf dessen Seiten jeweils genau k Punkte liegen. In den folgenden Beispielen ist das alte Punktmuster jeweils blau und der offene Kranz von neuen Punkten (Gnomon) jeweils rot dargestellt.

Beispiele für Polygonalzahlen

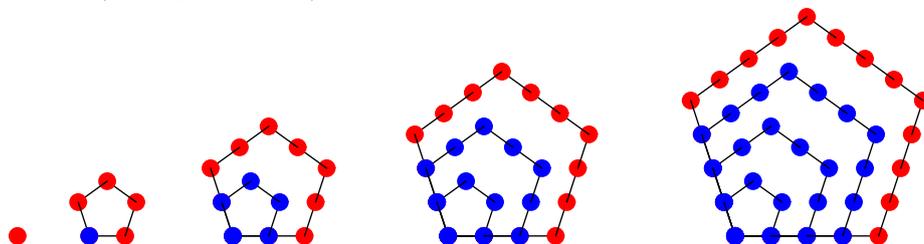
Die Dreieckszahlen (Triagonalzahlen)



Die Viereckszahlen (Quadratzahlen)



Die Fünfeckszahlen (Pentagonalzahlen):



Die ersten Polygonalzahlen: 1,5,12,22,35, ...

Rekursive Darstellung der Polygonalzahlen:

Aus dem Konstruktionsprinzip der Polygonalzahlen folgt sofort die rekursive Gleichung

$$G(E, k) = G(E, k - 1) + (E - 2) \cdot k - (E - 3)$$

Denn aus der Konstruktionsvorschrift folgt: In der Stufe k wird jede der „neuen“ Seiten des Polygons mit k neuen Punkten belegt. Dies gibt $(E - 2) \cdot k$ neue Punkte. Dabei wurden aber exakt $E - 3$ Punkte doppelt gezählt.

Die explizite Darstellung der Polygonalzahlen

Im Folgenden betrachten wir Polygonalzahlen zu einer festen Eckenzahl E und schreiben kurz G_k an Stelle von $G(E, k)$. Die oben gegebene Konstruktionsvorschrift für die Polygonalzahlen ist *rekursiv*; d.h. zur Beschreibung des Punktmusters in der Stufe k wird auf das Punktmuster in der Stufe $k - 1$ zurückgegriffen.

Diese rekursive Darstellung hat einen deutlichen Aufforderungscharakter, ausgehend von den Anfangswerten einfach loszurechnen und sich dabei immer weiter „hochzuhangeln“.

$$\begin{aligned} G_1 &= 1 \quad (= (E - 2) \cdot 1 - (E - 3)) \\ G_2 &= G_1 + (E - 2) \cdot 2 - (E - 3) \\ G_3 &= G_2 + (E - 2) \cdot 3 - (E - 3) \\ G_4 &= G_3 + (E - 2) \cdot 4 - (E - 3) \\ G_5 &= G_4 + (E - 2) \cdot 5 - (E - 3) \\ &\dots \\ G_{k-1} &= G_{k-2} + (E - 2) \cdot (k - 1) - (E - 3) \\ G_k &= G_{k-1} + (E - 2) \cdot k - (E - 3) \end{aligned}$$

Bei spaltenweisem Aufsummieren dieser Gleichungen heben sich viele Terme gegenseitig auf und wir erhalten die folgende explizite (d.h. nicht-rekursive) Darstellung für die Polygonalzahlen:

$$G_k = \frac{E - 2}{2} \cdot k^2 + \frac{4 - E}{2} \cdot k$$

3.2. Pyramidalzahlen

Ordnet man die Polygonalzahlen räumlich an, so erhält man die *Pyramidalzahlen*. Mit $H(E, k)$ sei diejenige Pyramidalzahl bestehend aus k Ebenen bezeichnet, welche die Polygonalzahl $G(E, k)$ als Grundfläche hat.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die „Stapelung“ von Dreieckszahlen zu einer *Tetraederzahl*-Pyramide.

Aus der obigen Beschreibung der Konstruktion der Pyramidalzahlen folgt unmittelbar die folgende rekursive Beschreibung

$$H(E, k) = H(E, k - 1) + G(E, k)$$

bzw. (man beachte, dass auch das Summenzeichen ein rekursives Konstrukt ist):

$$H(E, k) = \sum_{i=1}^k G(E, i).$$

Die explizite Form der Pyramidalzahlen

Aus der letzten Gleichung folgt mit der expliziten Form für die Polygonalzahlen

$$H(E, k) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{E-2}{2} \cdot i^2 + \frac{4-E}{2} \cdot i \right)$$

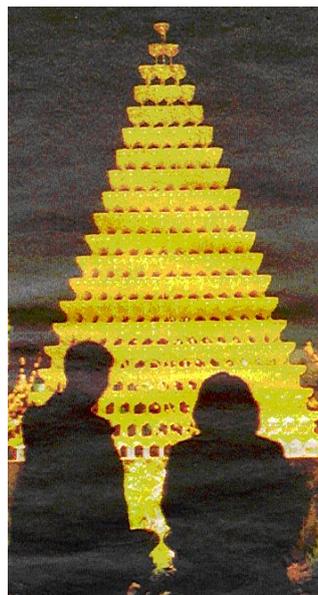
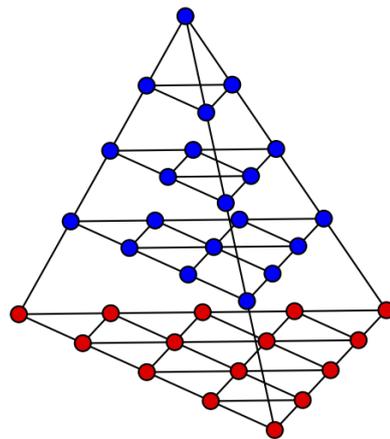
und daraus folgt mit den Summenformeln für die ersten und zweiten Potenzen (Dreieckszahlen, Quadratzahlen):

$$H(E, k) = \frac{E-2}{6} \cdot k^3 + \frac{1}{2} \cdot k^2 + \frac{5-E}{6} \cdot k.$$

Eine kleine Anwendung: In einer süddeutschen Wochenzeitung war vor einiger Zeit zu lesen:

Der etwas andere Weihnachtsbaum in Tokio: Aus 3000 Champagnergläsern besteht dieser Weihnachtsbaum, der ... in einem Park der japanischen Hauptstadt Tokio leuchtet.

Prüfen Sie, ob diese Aussage plausibel ist.



4. Die Fibonacci-Zahlen

Leonardo von Pisa (1170–1250), genannt Fibonacci (kurz für *filius bonacci*), einer der größten europäischen Mathematiker des Mittelalters, stellte in seinem berühmten Buch *Liber Abaci* im Jahre 1202 eine Aufgabe zur Kaninchenvermehrung vor, deren Lösung zu der inzwischen als „Fibonacci-Zahlen“ bezeichneten Zahlenfolge 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... führte. Die Fibonacci-Zahlen gaben über die folgenden Jahrhunderte hinweg Anlass für vielfältige mathematische Untersuchungen.

Die Fibonacci-Zahlen erfüllen eine Vielzahl von rekursiven und nichtrekursiven Gleichungen, von denen eine zu interessanten optischen Täuschungen führt (sie wird weiter unten behandelt). Sie geben darüber hinaus Anlass zu vielfältigen geometrischen Veranschaulichungen und sie können als ein Ausgangspunkt für die Behandlung linearer Differenzgleichungen angesehen werden.

Darüber hinaus war Leonardo von Pisa einer der maßgeblichen Protagonisten bei der Verbreitung des aus Indien stammenden *Zehnersystems*, das er in Nordafrika kennengelernt hatte.

4.1. Die formale (rekursive) Beschreibung

Charakteristisch für die Fibonacci-Zahlen ist ihre Eigenschaft, dass (mit Ausnahme der beiden Anfangswerte) jede von ihnen die Summe ihrer beiden Vorgänger ist.

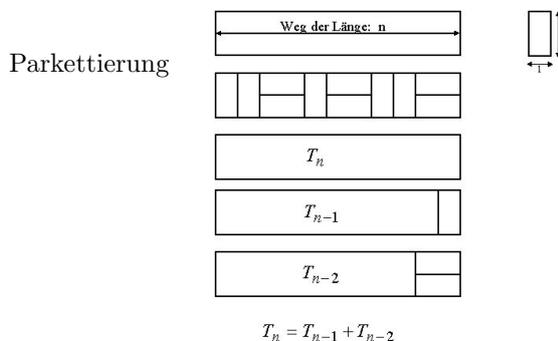
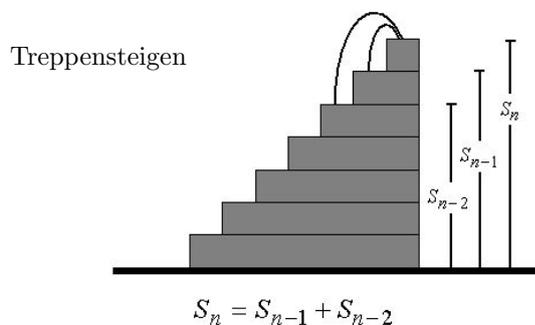
$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Die Fibonacci-Zahlen lassen sich also ab $n = 2$ rekursiv berechnen, indem die beiden vorherigen Folgenglieder mit einander addiert werden. In der folgenden Wertetabelle sind die ersten Fibonacci-Zahlen dargestellt.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...

4.2. Veranschaulichung

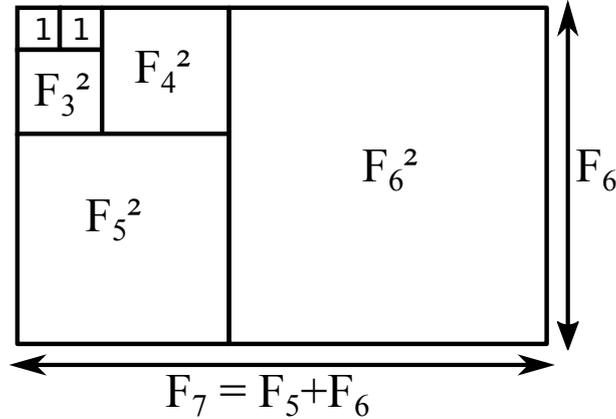
Die folgenden beiden Grafiken sollen die formale Beschreibung der Fibonacci-Zahlen veranschaulichen. Dabei kommt es primär auf die rekursive Beschreibung und weniger auf die Anfangswerte an.



5. Weitere Beispiele

5.1. Quadrate und Rechtecke aus Fibonacci-Zahlen

In der folgenden Figur werden Quadrate über Fibonacci-Zahlen zu Rechtecken zusammengesetzt.



In algebraischer Formulierung:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = F_6 \cdot F_7 \text{ und}$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Diese Gleichung lässt sich alternativ auch folgendermaßen herleiten bzw. beweisen. Als dritte Alternative ist die Beweisführung mit der vollständigen Induktion möglich.

Beweis.

$$F_1^2 = F_1 \cdot F_2 \quad (\text{Anfangswerte})$$

$$F_2^2 = F_2 \cdot (F_3 - F_1) = \underline{F_2 \cdot F_3} - \underline{F_2 \cdot F_1}$$

$$F_3^2 = F_3 \cdot (F_4 - F_2) = \underline{\underline{F_3 \cdot F_4}} - \underline{\underline{F_3 \cdot F_2}}$$

$$F_4^2 = F_4 \cdot (F_5 - F_3) = F_4 \cdot F_5 - \underline{\underline{\underline{F_4 \cdot F_3}}}$$

$$\dots$$

$$F_{n-1}^2 = F_{n-1} \cdot (F_n - F_{n-2}) = \underline{\underline{F_{n-1} \cdot F_n}} - F_{n-1} \cdot F_{n-2}$$

$$F_n^2 = F_n \cdot (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n \cdot F_{n+1} - \underline{\underline{F_n \cdot F_{n-1}}}$$

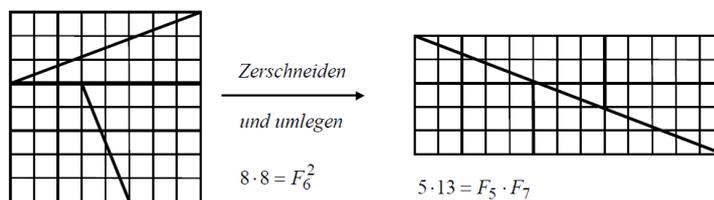
Summierung der linken und der rechten Seiten (wo sich die Terme, wie durch die Unterstreichungen angedeutet, weitgehend gegenseitig aufheben) ergibt

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

□

5.2. Fibonacci-Zahlen und optische Täuschungen

Auf dem ersten Blick scheint es so, als sei in der folgenden Abbildung durch das Zerschneiden und Umlegen aus dem Quadrat mit der Fläche $A = 8 \cdot 8 = 64$ ein Rechteck der Fläche $A = 5 \cdot 13 = 65$ entstanden – ein Ergebnis, das durch das Zerschneiden und Umlegen der einzelnen Flächen jedoch nicht möglich ist.



Der Trick hinter dieser optischen Täuschung besteht darin, dass sich im Rechteck hinter der diagonal eingezeichneten Geraden (von der linken oberen zur rechten unteren Ecke) ein sehr flaches Parallelogramm vom Flächeninhalt 1 verbirgt. Durch die dick gezeichnete Diagonale wird das Parallelogramm jedoch verdeckt.

Im obigen Beispiel gilt: $F_6^2 = F_5 \cdot F_7 - 1$.

Dieses Beispiel ist ein Spezialfall der folgenden Formel:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

Auf der Basis dieser Formel lassen sich analog zum obigen Zerschneidungs-und-Umlegungs-Beispiel weitere optische Täuschungen konstruieren. Die *absolute* Differenz der Flächeninhalte des durch diese Gleichung gegebenen Quadrats und Rechtecks ist immer gleich 1. Dadurch wird die *relative* Differenz immer kleiner, je größer die jeweiligen Fibonacci-Zahlen werden. Das „Täuschungspotential“ der optischen Täuschung lässt sich also durch Vergrößerung von n beliebig erhöhen.

6. Explizite Darstellung: Die Formel von Binet

Im Jahre 1843 entwickelte der französische Mathematiker Jacques Philippe Marie Binet eine geschlossene „explizite“ Formel, die ihm zu Ehren heute als *Binetsche Formel* bezeichnet wird. Zwischen der ersten Erwähnung der Fibonacci-Zahlen und der Entdeckung der expliziten Darstellung lagen also mehrere Jahrhunderte.

Die Formel von Binet lautet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Ihre Richtigkeit wird gelegentlich angezweifelt (was nicht unvernünftig ist), da die vielen Wurzeln dem Umstand zu widersprechen scheinen, dass die Fibonacci-Zahlen per Definition nur natürliche Zahlen sein können. Bei genauerem Hinsehen (und der Nutzung von Computeralgebra Systemen) stellt man jedoch fest, dass sich die nichtnatürlichen Bestandteile in der Formel gegenseitig aufheben.

Die Formel von Binet ist heutzutage nur noch strukturell interessant. Sie zeigt z.B., dass das Wachstum der Fibonacci-Zahlen vom exponentiellen Typ ist, aber sie eignet sich nicht zur numerischen Berechnung der Fibonacci-Zahlen. Denn sie macht von der Wurzel- und der Exponentialfunktion Gebrauch, deren Berechnungsalgorithmen auf im Prinzip nichtabbrechenden Wiederholungsprozessen basieren. Da diese (Iterations-) Rechnungen, seien sie iterativ oder rekursiv implementiert, doch irgendwann einmal „mit

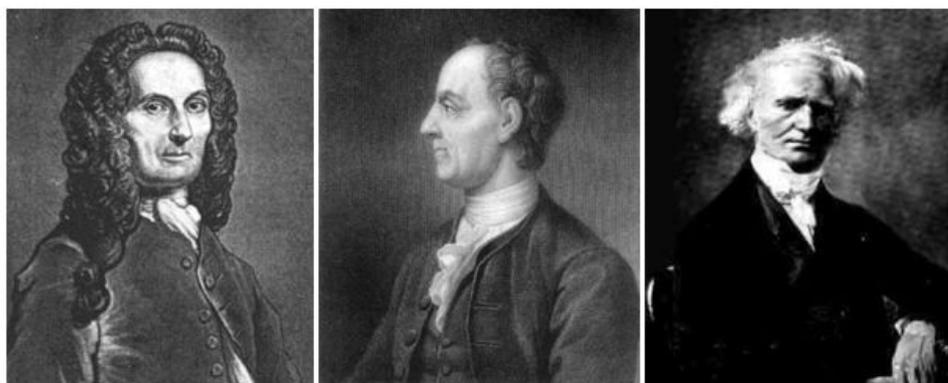
roher Gewalt“ abgebrochen werden müssen, liefern sie bestenfalls *Näherungswerte*. Erschwerend kommt hinzu, dass diese Berechnungen nicht mehr nur (wie bei den rekursiven oder iterativen Basis-Algorithmien mit ganzen Zahlen erfolgen können. Man muss in irgendeiner Form von reellen Zahlen Gebrauch machen. Und diese sind aus Gründen der Korrektheit (Genauigkeit) und der Berechnungseffizienz höchst problematisch; insbesondere dann, wenn sie im Computer mit dem Konstrukt der „Gleitkommazahlen“ umgesetzt werden.

Die explizite Formel für die Glieder der Fibonacci-Folge wurde von dem französischen Mathematiker Jacques Philippe Marie Binet im Jahr 1843 formuliert. Es ist anzunehmen, dass sie im wesentlichen auch bereits den Mathematikern Abraham de Moivre und Leonhard Euler bekannt gewesen ist.

A. de Moivre (1667–1754)

L. Euler (1707–1783)

J. P. M. Binet (1786–1856)



Die Formel von Binet lässt sich auch in der folgenden hochgradig symmetrischen Form schreiben. In leicht modifizierter Darstellung lautet die Fibonacci-Gleichung $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$. Das zugehörige „charakteristische Polynom“ ist $x^2 - x - 1 = 0$. Sind $a = (\sqrt{5} + 1)/2$ und $b = -(\sqrt{5} - 1)/2$ die Wurzeln dieses charakteristischen Polynoms, so gilt

$$F(n) = \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$