Berichte der Gruppen

Mathematisches Papierfalten

Teilnehmer:

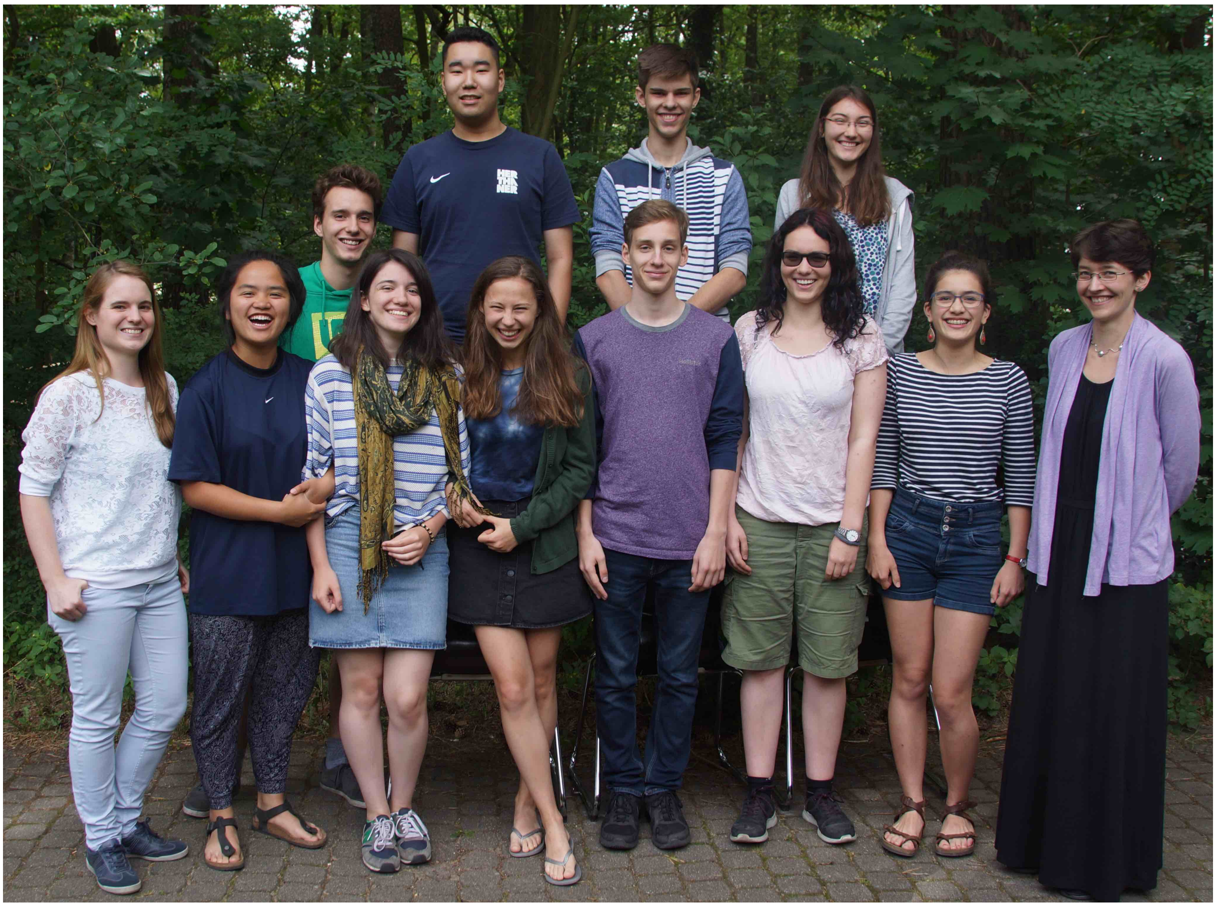
Tran Nu Bao Chau	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Milena Djatchkova	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Anja Dücker	Herder-Gymnasium
Katharina Graf	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Marian Hauser	Herder-Gymnasium
Emil Jensen	Herder-Gymnasium
Dale Nows	Andreas-Gymnasium
Pauline Peters	Käthe-Kollwitz-Gymnasium
Soninbayar Purevsuren	Andreas-Gymnasium
Lisa Sahtout	Herder-Gymnasium

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Sandra Ebel	Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

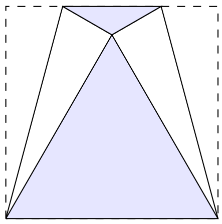
Luise Fehlinger	Humboldt-Universität zu Berlin

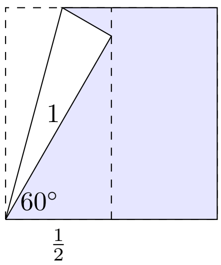


1. Zwei kleine Aufgaben zum Warmwerden

Aufgabe. Falte aus einem quadratischen Blatt Papier ein gleichseitiges Dreieck.

Man kann auf verschiedene Arten an diese Aufgabe herangehen. Wir können versuchen, den Kongruenzsatz SSS zu nutzen und die Tatsache, dass alle Seiten des Quadrats gleichlang sind. D.h. wir falten die beiden oberen Ecken des Quadrats auf denselben Punkt, so dass die Falze durch die jeweils darunter liegenden Ecken des Quadrats geht.





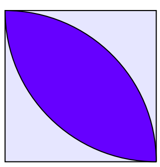
Alternativ können wir uns auf die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks konzentrieren. Da $\cos 60° = \frac{1}{2}$ gilt, müssen wir also ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Hypotenuse der Länge 1 und einer Kathete der Länge $\frac{1}{2}$ falten. Dazu sollten wir also erst die Mittelsenkrechte der unteren Quadratseite falten. Dann falten wir die oberen Quadratecken so auf die Mittelsenkrechte, dass die Falz durch die darunter liegende Quadratecke geht.

Aufgabe. Falte die Ecke A des quadratischen Blattes auf einen Punkt des Blattes. Es entsteht ein „Turned-Up Part“(TUP).

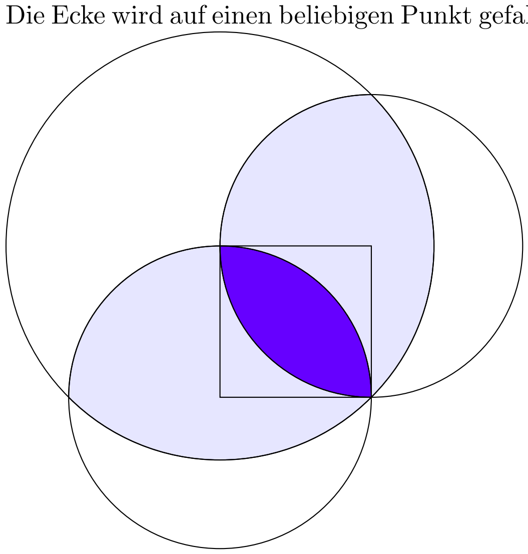
- Wann ist die entstandene Fläche (das TUP) ein Dreieck / Viereck / Fünfeck /...?
- Wie ist es, wenn A auch auf Punkte außerhalb des Blattes gefaltet werden kann?
- Beweise alle Behauptungen.

Als Lösung möchten wir hier nur die folgenden Skizzen präsentieren. Den genauen Nachweis überlassen wir dem geneigten Leser. Hinweis: Betrachte die Grenzfälle zwischen Drei- und Vierecken und suche nach konstanten Längen.

Die Ecke wird auf einen Punkt innerhalb des Quadrats gefaltet.

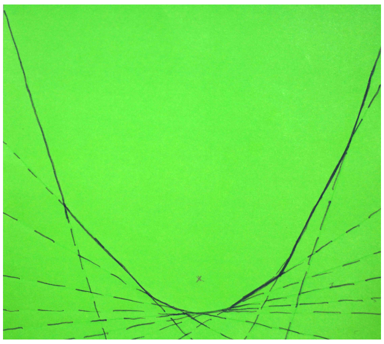


Die Ecke wird auf einen beliebigen Punkt gefaltet.



2. Wie faltet man eine Parabel?

Aufgabe. Gegeben sei eine Gerade l und ein Punkt $Q \notin l$. Falte Q auf l auf viele verschiedene Arten. Was kannst Du beobachten?



Sei nun $P \in l$ gegeben. Wir falten Q auf P. Dann ist die Falz die Mittelsenkrechte m_P von $\overline{PQ}$. Wir erhalten eine Geradenschar $\{m_P \mid P \in l\}$.
Wie sieht die Hüllkurve g dieser Geradenschar aus?
Wir koordinatisieren dieses Setting.

$$\begin{aligned} Q &= (0,1), \\ l &= \{(x,-1) \mid x \in \mathbb{R}\}, \\ P &= (p,-1) \in l. \end{aligned}$$

Wie bestimmen wir zu gegebener x-Koordinate die y-Koordinate dieser Hüllkurve g?

Es sei $l_x := \{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Gesucht ist also die Gerade m_P, die den Schnittpunkt mit l_x mit der größten y-Koordinate hat.

Wir benötigen die Geradengleichung für m_P. Aus der Faltkonstruktion wissen wir: m_P ist die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$. Also ist die Steigung von m_P das negativ Reziproke der Steigung von $\overline{PQ}$, also $\frac{-1}{\frac{1-(-1)}{0-p}} = \frac{p}{2}$. Und m_P enthält den Mittelpunkt von $\overline{PQ}$, welcher $(\frac{p}{2}, 0)$ ist. Damit erhalten wir die Geradengleichung für m_P:

$$m_P(t) = \frac{p}{2} \cdot t - \frac{p^2}{4}.$$

Der Schnittpunkt EINER Geraden m_P mit l_x ist also $\left(x, \frac{p}{2} \cdot x - \frac{p^2}{4}\right)$ und die y-Koordinate wird für $P_{max} = (p_{max}, -1) = (x, -1)$ maximal. D.h. der „höchste“ Schnittpunkt aller Geraden m_P mit l_x ist $(x, \frac{x^2}{4})$. Damit erhalten wir die Beschreibung der Hüllkurve $g = \left\{(x, \frac{x^2}{4}) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$. Dies ist eine gestauchte Parabel. Wir können schnell nachrechnen, dass m_P für $P = (x, -1)$ die Tangente an g im Punkt $(x, \frac{x^2}{4})$ ist.

3. Was können wir alles mit Zirkel und Lineal konstruieren?

Die Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal sind:

- Eine Gerade durch zwei gegebene Punkte zeichnen.
- Einen Kreis um einen gegebenen Punkt durch einen zweiten gegebenen Punkt zeichnen.
- Den Schnittpunkt von zwei Geraden oder Kreisen bestimmen.

Alle übrigen Konstruktionen setzen sich aus diesen zusammen. D.h. neue Punkte gewinnen wir durch Konstruktion von Schnittpunkten.

3.1. Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben seien die Punkte $A = (a_x, a_y)$ und $B = (b_x, b_y)$. Die Gerade durch diese Punkte ist gegeben durch

$$\Big\{ \Big(a_x + t(b_x - a_x), a_y + t(b_y - a_y) \Big) \Big| \, t \in \mathbb{R} \Big\} .$$

Um den Schnittpunkt zweier Geraden (einer durch A und B und einer durch C und D) zu berechnen, setzen wir die bestimmenden Terme für die erste und für die zweite Koordinate gleich. Wir erhalten ein lineares Gleichungssystem.

$$I \quad a_x + t(b_x - a_x) = c_x + s(d_x - c_x) \qquad II \quad a_y + t(b_y - a_y) = c_y + s(d_y - c_y)$$

Die Lösung dieses Systems sind Zahlen t und s, welche Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten schon konstruierter Zahlen – den Koordinaten der Punkte A, B, C und D – sind.

3.2. Schnittpunkte zwischen Gerade und Kreis

Der Kreis um den Punkt M mit dem Radius r wird durch die Gleichung $|\overline{MP}|^2 = r^2$ beschrieben. Wenn $P = (x, y)$ gilt, können wir auch $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$ schreiben.

Wir suchen nun diese Punke $\Big(a_x + t(b_x - a_x), a_y + t(b_y - a_y) \Big)$, die die Kreisgleichung erfüllen. Dies ergibt eine quadratische Gleichung für t. D.h. wir erhalten als neue Koordinaten auch Quadratwurzeln schon konstruierter Zahlen.

3.3. Schnittpunkte zweier Kreise

Wir suchen nun also Punkte (x, y), die zwei Kreisgleichungen zugleich erfüllen.

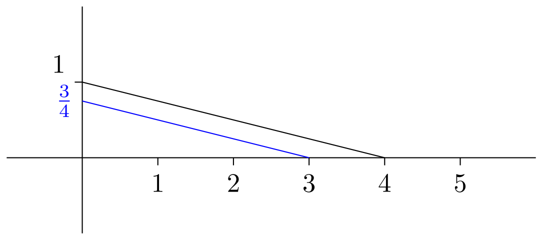
$$\begin{array}{llrcl@{\qquad}lr}
 & I & (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 & = & r_1^2 & II & (x - n_x)^2 + (y - n_y)^2 = r_2^2 \\
\text{bzw.} & I & x^2 - 2m_x x + m_x^2 + y^2 - 2m_y y + m_y^2 & = & r_1^2 & II & x^2 - 2n_x x + n_y^2 + y^2 - 2n_y y + n_y^2 = r_2^2
\end{array}$$

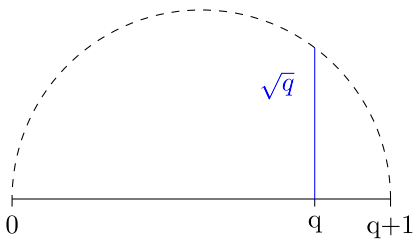
Subtrahieren wir Gleichung I von Gleichung II, erhalten wir wieder eine lineare Abhängigkeit zwischen x und y, welche, eingesetzt in einer der Ausgangsgleichungen, wieder zu Lösungen mit Quadratwurzeln führt.

3.4. Konkrete Realisierung

Gegeben seien zwei Punkte A und B. Wir setzen den Abstand zwischen diesen Punkten Eins.

Ganze Zahlen können wir einfach durch wiederholtes Abtragen der Länge Eins konstruieren. Die Strahlensätze erlauben uns, rationale Zahlen zu konstruieren.





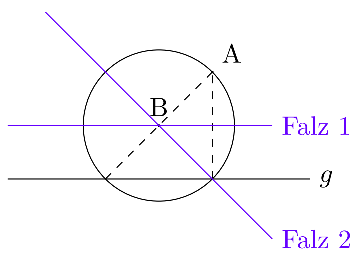
Wurzeln bereits konstruierter Zahlen können wir mit dem Höhensatz konstruieren.

Fazit: Wir können alle rationalen Zahlen und Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Wurzeln aus schon konstruierten Zahlen konstruieren.

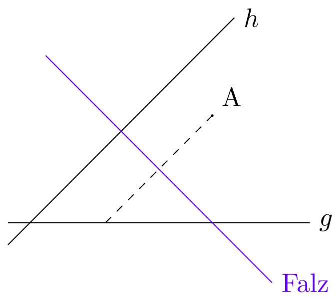
4. Was können wir durch Papierfalten konstruieren?

Die grundlegenden Papierfaltungen sind:

- Die Mittelsenkrechte einer Strecke falten.
- Die Verbindungsgerade zweier Punkte falten.
- Die Winkelhalbierende eines Winkels falten.
- Das Lot durch einen Punkt auf eine Gerade falten.
- Parabeltangente 1: Gegeben seien zwei Punkte A, B und eine Gerade g. Falte A auf g so, dass die Falz durch B geht. Dazu muss jedoch der Abstand von B zu g kleiner oder gleich dem Abstand von A zu B sein.
  Dies können wir auch mit Zirkel und Lineal konstruieren. Dazu zeichnen wir einen Kreis um B durch A. Die Mittelsenkrechten zwischen A und je einem der Schnittpunkte sind die gesuchten Falze.

- Parabeltangente 2: Gegeben seien ein Punkt A und zwei Geraden $g \nparallel h$. Falte A auf g so, dass die Falz senkrecht zu h ist.
  Auch dies können wir mit Zirkel und Lineal konstruieren. Wir konstruieren per Doppellotkonstruktion die Parallel zu h durch A. Diese schneidet g im Punkt A' und die gesuchte Falz ist die Mittelsenkrechte von $\overline{AA'}$.

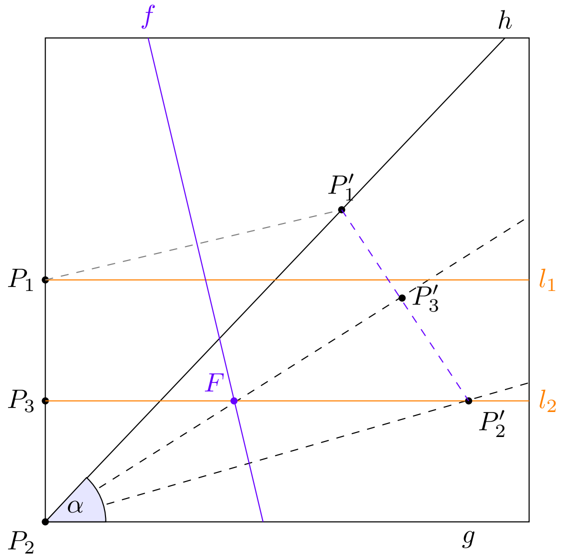
- Simultane Tangente an zwei Parabeln: Gegeben seien zwei Punkte A, B und zwei Geraden g, h. Falte A auf g und B auf h. Der Abstand der Punkte darf nicht kleiner als der Abstand der Geraden sein.

  Diese Konstruktion ist mit Zirkel und Lineal nicht möglich. Das werden wir später beweisen, indem wir zeigen, dass die dritte Wurzel aus 2 durch Falten konstruierbar ist aber nicht mit Zirkel und Lineal. Bei der Faltkonstruktion werden wir selbstverständlich eine simultane Tangente benutzen.

4.1. Anwendungen der Simultanen-Tangenten-Faltung

- Dreiteilung eines Winkels

  1. Gegeben ist der Winkel α, die Schenkel heißen g und h der Scheitel P_2. Dabei sei g die untere Seite des Papier-Quadrates.
  2. Wir falten die Parallele l_1 zu g, als Mittelsenkrechte der linken Quadratseite. Den Mittelpunkt der linken Quadratseite nennen wir P_1.
  3. Nun falten wir die Parallele l_2 zu g durch den Mittelpunkt P_3 von $\overline{P_1P_2}$.
  4. Wir falten eine simultane Tangente indem wir P_1 auf h und P_2 auf l_2 falten, die entstehende Falzgerade heiße f. Der Schnittpunkt von l_2 und f heiße F.
  5. Der Spiegelpunkt von P_1 auf h, heiße P_1', der Spiegelpunkt von P_2 auf l_2 heiße P_2' und der Spiegelpunkt von P_3 heiße P_3'. f ist die Mittelsenkrechte von $\overline{P_1P_1'}$ und $\overline{P_2P_2'}$, d.h. $g_{P_1P_1'} \parallel g_{P_2P_2'}$.
  6. Nun falten wir die Gerade durch P_2 und P_3' und die durch P_2 und P_2'. Weil das Viereck $\square P_2P_2'P_3'P_3$ ein gleichschenkliges Trapez ist, schneiden sich die Diagonalen auf der Symmetrieachse, also in F. Damit ist α gedrittelt.



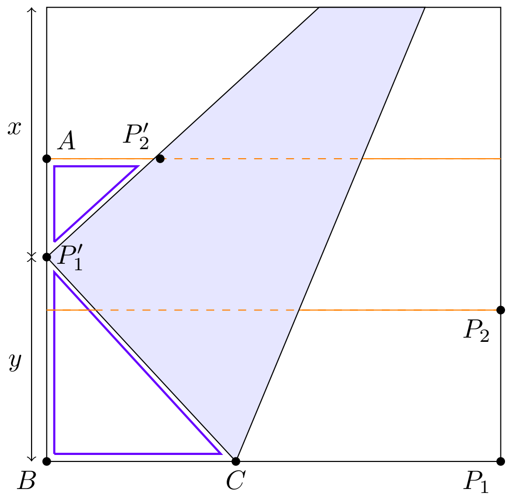
Beweis

7. Die Falz f ist Spiegelachse und Mittelsenkrechte von $\overline{P_1P_1'}$ und $\overline{P_2P_2'}$ nach Konstruktion. $\angle P_2'P_3P_1$ und $\angle P_1'P_3'P_2$ sind daher rechte Winkel.
8. Durch Fällen eines Lotes von P_2' auf g entsteht ein rechter Winkel im Lotfußpunkt L.
9. $|\overline{P_1P_3}| = |\overline{P_3P_2}| = |\overline{P_1'P_3'}| = |\overline{P_3'P_2'}|$ gilt aufgrund der Spiegelung an f. Auch $|\overline{P_2'L}|$ ist dieselbe Länge wie alle vorhergehenden, da $\square P_2LP_2'P_3$ ein Rechteck ist.
10. $\triangle P_2P_3'P_2'$ und $\triangle P_2P_2'L$ sind kongruent, da sie in zwei Seiten und im rechten (größten) Winkel übereinstimmen (Kongruenzsatz SsW).
11. $\triangle P_2P_3'P_2'$ und $\triangle P_2P_3'P_1'$ sind kongruent, da sie in zwei Seiten und im rechten Winkel übereinstimmen (Kongruenzsatz SWS).

Wir können also durch eine Faltkonstruktion Winkel dritteln.

- Würfelverdoppelung – Falten der dritten Wurzel aus 2

  1. Wir dritteln zunächst das quadratische Papier mit Seitenlänge m mit parallelen Falzen zur unteren Quadratseite.
  2. Es sei P_1 die untere rechte Ecke des Blattes und P_2 sei der Schnittpunkt der rechten Quadratseite mit der unteren Drittelfalz ($|\overline{P_1P_2}| = \frac{1}{3}m$).
  3. Wir falten eine simultane Tangente derart, dass P_1 auf der linken Quadratseite und P_2 auf der oberen Drittelfalz liegt.
  4. Nun teilt der Bildpunkt P_1' von P_1 die besagte Kante in x und y ($x > y$).



Behauptung: Die Strecken x und y stehen im Verhältnis $\sqrt[3]{2}$.

Beweis

5. O.B.d.A sei $y = 1$, sodass nur $x = \sqrt[3]{2}$ zu beweisen ist. Es gilt $m = x + 1$.
6. Nun gilt es folgende Dreiecke näher zu betrachen: $\triangle AP_2'P_1'$ mit A als Schnittpunkt der oberen Drittelfalz mit der linken Seitenkante und $\triangle P_1'BC$ mit B als untere linke Ecke des Quadrats und C als Schnittpunkt der unteren Kante mit der simultanen Tangente.
7. Diese Dreiecke sind laut Innenwinkelsummen- und Nebenwinkelsatz ähnlich.
8. Aufgrund der Ähnlichkeit gilt: $\frac{\left|\text{Kathete}_{\triangle AP_1'P_2'}\right|}{\left|\text{Hypotenuse}_{\triangle AP_1'P_2'}\right|} = \frac{\left|\text{Kathete}_{\triangle P_1'BC}\right|}{\left|\text{Hypotenuse}_{\triangle P_1'BC}\right|}$. Dabei gilt für die Längen:

   $|\text{Kathete}_{\triangle AP_1'P_2'}| = \frac{2x-1}{3}$,

   $|\text{Hypotenuse}_{\triangle AP_1'P_2'}| = \frac{x+1}{3}$,

   $|\text{Kathete}_{\triangle P_1'BC}| = \frac{(x+1)^2-1}{2x+1}$ und

   $|\text{Hypotenuse}_{\triangle P_1'BC}| = \frac{(x+1)^2+1}{2x+1}$.

   Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir das gewünschte Resultat.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}} &= \frac{\frac{(x+1)^2-1}{2x+1}}{\frac{(x+1)^2+1}{2x+1}} \\ \iff \quad (2x-1)((x+1)^2+1) &= ((x+1)^2-1)(x+1) \\ \iff \quad x^3 &= 2 \\ \iff \quad x &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

5. Warum ist $\sqrt[3]{2}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Definition 1. Ein Körper ist eine Menge von Elemente mit den zwei Verknüpfungnen (genannt) „Addition“ und „Multiplikation“. Dieser Körper ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der „Addition“ und „Multiplikation“ mit den jeweiligen Neutralen Elementen 0 und 1. Desweiteren gilt die Distributivität.

$\mathbb{Q}$ ist ein Körper bezüglich Addition und Multiplikation. Nun wird $\sqrt{2}$ adjungiert, wodurch ein neuer Körper mit den Basiselementen 1 und $\sqrt{2}$ entsteht.

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Jetzt sind weitere Quadratwurzelerweiterungen möglich:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt{3}] &= \{\tilde{a} + \tilde{b}\sqrt{3} \mid \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\} \\ &= \{a_1 + a_2\sqrt{2} + (b_1 + b_2\sqrt{2})\sqrt{3} \mid a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

Nach diesen Adjunktionen erhält man die Basis $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{3})$. Dies ist also eine Quadratwurzelerweiterung vom Grad 2^2.

Satz 1. *Zu jeder Körperkette von Quadratwurzelerweiterungen ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{a}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{a}][\sqrt{b}]$ ...), also einer Erweiterung des Grades 2^n über $\mathbb{Q}$, gibt es eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal.*

Ist $\sqrt[3]{2}$ also mit Zirkel und Lineal konstruierbar? Wenn ja, dann muss $\sqrt[3]{2}$ Element einer Erweiterung vom Grad 2^n über $\mathbb{Q}$ sein, sich also „irgendwie so“ darstellen lassen: $\sqrt[3]{2} = \sqrt{17 + \sqrt{5} \cdot 5 + \ldots}$!?

Sei der Körper K eine Quadratwurzelerweiterung vom Grad 2^n. Es sind also maximal 2^n Elemente von K linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Dann gibt es für $x \in K$ rationale Zahlen $\alpha_0, \ldots, \alpha_{2^n-1}$ mit:

$$\begin{aligned} x^{2^n} &= \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x^1 + \ldots + \alpha_{2^n-1} \cdot x^{2^n-1} \\ \iff \quad 0 &= x^{2^n} - \alpha_{2^n-1}x^{2^n-1} - \ldots - \alpha_1 \cdot x^1 - \alpha_0 \cdot 1. \end{aligned}$$

Damit ist x Nullstelle des Polynoms P, mit $P(t) = t^{2^n} - \alpha_0 \cdot 1 - \alpha_1 \cdot t^1 - \ldots - \alpha_{2^n-1} \cdot t^{2^n-1}$.

Wenn wir P zerlegen können, dann gilt $P(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, wobei Q_1 und Q_2 einen kleineren Grad haben. Dann wäre x ebenfalls Nullstelle von Q_1 oder Q_2.

Definition 2. Wenn P_{min} ein nicht weiter zerlegbares Polynom mit rationalen Koeffizienten ist, $P(x) = 0$ und der Leitkoeffizient 1 ist, dann nennen wir P_{min} Minimalpolynom zu x.

Angenommen $\sqrt[3]{2}$ ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar, d.h. $\sqrt[3]{2} \in K = \mathbb{Q}$ [„diverse Quadratwurzeln“]. Somit wäre $\sqrt[3]{2}$ eine Nullstelle eines Polynoms P. Dieses Polynom P wäre dann durch das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ teilbar.

Wir müssen also zunächst das Minimalpolynom zu $\sqrt[3]{2}$ finden. Vermutung: $P_{min}(x) = x^3 - 2$.

Wäre $x^3 - 2$ nicht das Minimalpolynom zu $\sqrt[3]{2}$, so könnten wir es weiter zerlegen.

Ansatz.

$$\begin{aligned} x^3 - 2 &= (x + a) \cdot (x^2 + bx + c) \\ \iff \quad x^3 - 2 &= x^3 + bx^2 + cx + ax^2 + abx + ac \\ \iff \quad 0 &= (a + b)x^2 + (ab + c)x + ac + 2 \end{aligned}$$

Koeffzientenvergleich liefert:

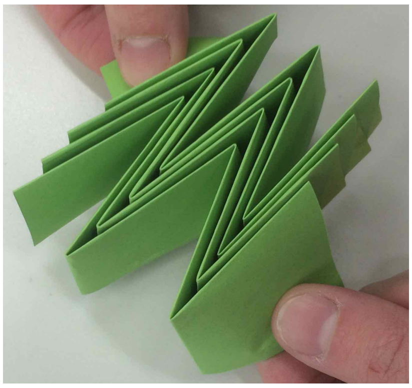
$$\begin{aligned} a &= -b, \\ b^2 &= c, \\ -b^3 &= -2 \iff b = \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

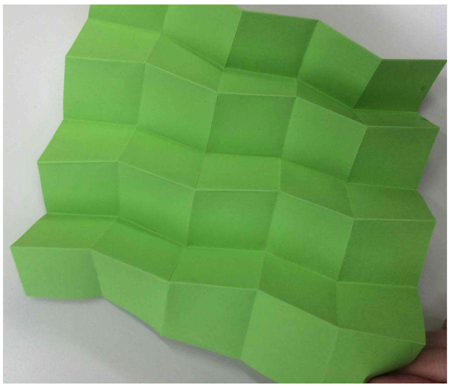
Wegen $b = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$, ist $x^3 - 2$ nicht weiter zerlegbar und damit das Minimalpolymon von $\sqrt[3]{3}$. Dieses Minimalpolynom gehört jedoch nicht zu einer Quadratwurzelerweiterung, da es vom Grad 3 ist. Folglich ist $\sqrt[3]{2}$ nicht Element einer Quadratwurzelerweiterung von $\mathbb{Q}$, also auch nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Fazit: Konstruktionen durch Falten sind stärker als Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

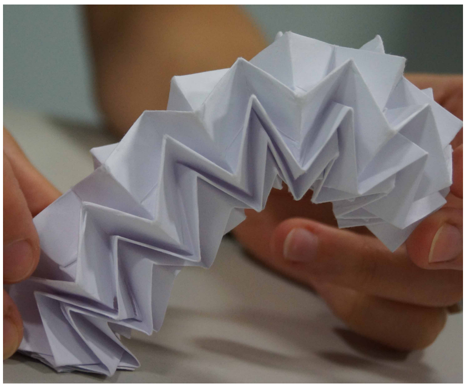
6. Technische Anwendungen – Miura-Faltung, Starshield, Stents

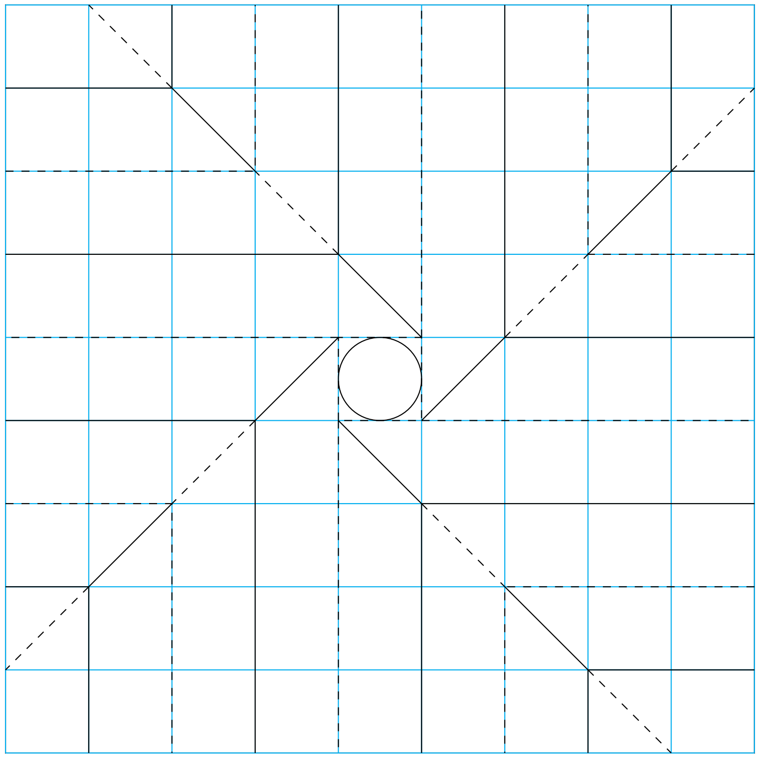
Die Miura-Faltung wurde von dem japanischen Astrophysiker Koryo Miura erfunden, um Solarmodule für die Raumfahrt kompakt zu verpacken und im All möglichst einfach zu entfalten.



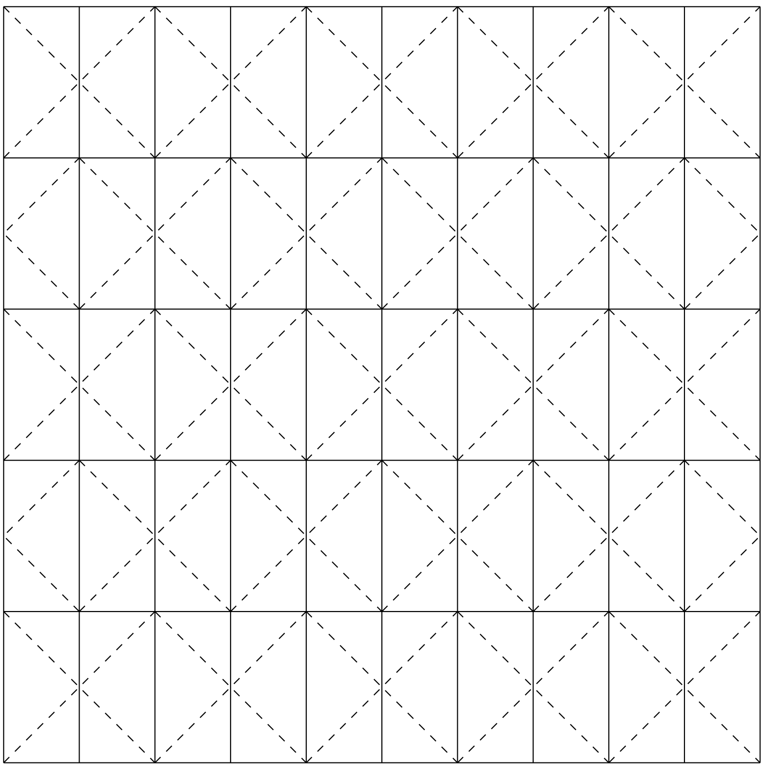


Zusätzlich wird die Miura-Faltung in der Leichtbautechnik (im Flugzeugbau) verwendet. Auch Stadtpläne lassen sich so sehr gut falten. Diese Faltungen sind sehr stabil und flexibel und einfach in der Handhabung. Variationen des Faltmusters erlauben auch die Faltung gekrümmter Objekte.





Dieses Faltmuster gehört zu einem „Starshield“. Auch dieses lässt sich zusammen- und entfalten durch Bewegen zweier gegenüberliegender Ecken. Ein Starshield kann beim Fotografieren von Planeten weit entfernter Sterne zum Abschirmen des Sternenlichts verwendet werden und perfekt an die verschiedenen Sterne angepasst werden.



Einen Stent wird bei verengten Herzkranzgefäßen eingesetzt. Klassisch wurden starre Stent verwendet, die mit einem Ballon geweitet werden mussten. Dieser gefaltete Stent ist zusammengefaltet sehr klein, entfaltet sich durch Wärme selbstständig und bleibt zudem in der Ader flexibel.