FOURIERREIHEN

Teilnehmer:

Paul Beyer	Herder-Oberschule
Paul Bismarck	Herder-Oberschule
Johannes Bleidorn	OSZ KIM
Martin Büttner	Heinrich-Hertz-Oberschule
Alexander Fromm	Heinrich-Hertz-Oberschule
Asar Hage-Ali	Heinrich-Hertz-Oberschule
Georg Wieselmann	OSZ KIM

Gruppenleiter:

Konrad Gröger	Humboldt-Universität

Die Gruppe beschäftigte sich mit der Darstellung stetiger reellwertiger Funktionen durch Fourierreihen.

Zuerst lernte die Gruppe die Grundbegriffe „Skalarprodukt“ und „Norm“ für stetige Funktionen kennen. Zur Motivation wurde auf entsprechende Begriffe für gewöhnliche Vektoren eingegangen. Danach wurden Orthonormalsysteme behandelt, speziell ein mit Hilfe trigonometrischer Funktionen gebildetes System. Es wurde gezeigt, dass man zu jeder stetigen Funktion u eine Reihe angeben kann, deren Glieder skalare Vielfache der Elemente eines Orthonormalsystems sind und die in einem bestimmten Sinne gegen u konvergiert. Diese Reihe nennt man die Fourierreihe von u. Am Ende wurde ein Ausblick auf Möglichkeiten der theoretischen und praktischen Nutzung von Fourierreihen gegeben.

Fourierreihen

1. Grundbegriffe

Im Folgenden befassen wir uns immer mit stetigen reellwertigen Funktionen, die auf dem Intervall $[-1,1]$ definiert sind. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Menge aller dieser Funktionen mit V. Die Menge V hat folgende Eigenschaft: Sind u und v Elemente von V und ist t eine reelle Zahl, so liegen auch die Funktionen $u+v$ und tu in V; dabei sind $u+v$ und tu durch die Vorschrift

$$(u+v)(x) := u(x)+v(x), \quad (tu)(x) := tu(x) \text{ für alle } x \in [-1,1]$$

definiert.

Definition 1:

Für beliebige $u, v \in V$ nennt man die Zahl $(u|v) := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$ **Skalarprodukt der Funktionen** u **und** v und die Zahl $\|u\| := \sqrt{(u|u)} = \left(\int_{-1}^{1}(u(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$ **Norm von** u.

> Wer mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ oder allgemeiner mit dem Raum $\mathbb{R}^n$ vertraut ist, erkennt, dass die eingeführten Begriffe zum Skalarprodukt $a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ zweier Vektoren a und b und zur Länge $|a| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ eines Vektors a analog sind. An die Stelle der Summe ist das Integral getreten, an die Stelle des Index i der Komponenten das Argument x der Funktionen.

Wir stellen die Eigenschaften des Skalarprodukts und der Norm, die im Folgenden benötigt werden, in einem Satz zusammen.

Satz 1. *Für beliebige $u, v, w \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\|u\| = 0 \iff u = 0, \quad (u|v) = (v|u), \tag{1}$$

$$(u+v|w) = (u|w) + (v|w), \quad (tu|v) = t(u|v), \tag{2}$$

$$|(u|v)| \le \|u\|\|v\| \text{ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)}, \tag{3}$$

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung)}. \tag{4}$$

Beweis:

Schritt 1. Die Behauptungen (1) und (2) sind offensichtlich richtig.

Schritt 2. Für $u, v \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit Hilfe von (2)

$$0 \le \|u+tv\|^2 = (u+tv|u+tv) = (u|u) + 2t(u|v) + t^2(v|v) = \|u\|^2 + 2t(u|v) + t^2\|v\|^2. \tag{5}$$

Für $v = 0$ ist (3) sicher richtig. Für $v \neq 0$ und $t = -\dfrac{(u|v)}{\|v\|^2}$ folgt aus (5)

$$0 \leq \|u\|^2 - 2\frac{(u|v)^2}{\|v\|^2} + \frac{(u|v)^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{(u|v)^2}{\|v\|^2}.$$

Also ist $(u|v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$, d.h., (3) ist richtig.
Schritt 3. Mit Hilfe der Ungleichung (3) ergibt sich

$$\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Daraus folgt die Dreiecksungleichung (4) durch Wurzelziehen. □

Definition 2:
Gilt für $u, v \in V$ die Beziehung $(u|v) = 0$, so sagt man, u und v seien **zueinander senkrecht** (**orthogonal**). Ist $\|u\| = 1$, so sagt man, u sei **normiert**. Ein System $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$ von Funktionen aus V heißt **Orthonormalsystem**, wenn für $n, m = 0, 1, 2\ldots$ folgende Beziehung gilt: $(e_n|e_m) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ 1, & \text{falls } n = m. \end{cases}$

Orthonormalsysteme spielen in V die gleiche Rolle wie Systeme von Basisvektoren in gewöhnlichen Vektorräumen. Es wird gezeigt werden, dass man für die Elemente von V mit Hilfe eines Orthonormalsystems eine Art von „Koordinatendarstellung“ angeben kann.

2. Beispiel für ein Orthonormalsystem

Behauptung: Durch die Vorschriften $e_0(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ für $x \in [-1, 1]$ und

$$e_{2k-1}(x) := \sin(k\pi x), \quad e_{2k}(x) := \cos(k\pi x) \quad \text{für } x \in [-1,1] \text{ und } k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

wird ein Orthonormalsystem $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$ in V definiert.

Zum Beweis dieser Behauptung muss man die Skalarprodukte $(e_n|e_m)$ berechnen. Für $k, l = 1, 2, \ldots$ ergibt sich durch partielle Integration

$$\begin{aligned}(e_{2k}|e_{2l}) &= \int_{-1}^{1} \cos(k\pi x)\cos(l\pi x)dx = \frac{k}{l}\int_{-1}^{1} \sin(k\pi x)\sin(l\pi x)dx \\ &= \frac{l}{k}\int_{-1}^{1} \sin(k\pi x)\sin(l\pi x)dx.\end{aligned}$$

Für $k \neq l$ ist $\frac{k}{l} \neq \frac{l}{k}$. Deshalb muss in diesem Fall $(e_{2k}|e_{2l}) = (e_{2k-1}|e_{2l-1}) = 0$ sein. Für $k = l$ ergibt sich

$$\int_{-1}^{1} \cos^2(k\pi x)dx = \int_{-1}^{1} \sin^2(k\pi x)dx = \int_{-1}^{1} (1 - \cos^2(k\pi x))dx.$$

Daher ist

$$2\int_{-1}^{1} \cos^2(k\pi x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

und deshalb $\|e_{2k}\| = \|e_{2k-1}\| = 1$. Weiter ist

$$(e_{2k}|e_{2l-1}) = \int_{-1}^{1} \cos(k\pi x)\sin(l\pi x)dx = 0,$$

weil der Integrand eine ungerade Funktion und das Integrationsintervall symmetrisch zum Nullpunkt ist. Die Aussagen $(e_0|e_0) = 1$ und $(e_0|e_{2k}) = (e_0|e_{2k-1}) = 0$ sind ebenfalls einfach zu beweisen. Darauf wird hier nicht eingegangen.

Das hier angegebene Orthonormalsystem nennen wir das **trigonometrische Orthonormalsystem**. Mit diesem System werden wir hauptsächlich arbeiten. Es gibt aber noch viele andere Orthonormalsysteme in V.

3. Approximation stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt sei $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$ ein beliebig gewähltes Orthonormalsystem in V. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit V_n die Menge der Elemente von V, die sich mit reellen Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ in der Form $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$ schreiben lassen. Gehören u und v zu V_n, so auch $u+v$ und tu für reelles t.

Satz 2. *Zu jeder Funktion $u \in V$ gibt es genau eine Funktion $v_n \in V_n$, für die $\|u - v_n\|$ minimal wird. Es ist $v_n = \sum\limits_{j=0}^{n} (u|e_j)e_j$, und es gilt*

$$\|u - v_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=0}^{n} (u|e_j)^2. \tag{7}$$

Die Funktion $u - v_n$ ist senkrecht zu allen Funktionen aus V_n.

Beweis: Für $v = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j e_j$ gilt

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 &= \|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 - 2\Big(u\Big|\sum_{j=0}^{n} c_j e_j\Big) + \Big(\sum_{j=0}^{n} c_j e_j\Big|\sum_{i=0}^{n} c_i e_i\Big) \\
&= \|u\|^2 - 2\sum_{j=0}^{n} c_j (u|e_j) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} c_j c_i (e_j|e_i) \\
&= \|u\|^2 - 2\sum_{j=0}^{n} c_j (u|e_j) + \sum_{j=0}^{n} c_j^2.
\end{aligned}$$

Der Anteil von c_j an diesem Ausdruck ist eine quadratische Funktion in c_j, die genau für $c_j = (u|e_j)$ ihr Minimum annimmt. Setzt man diesen Wert für c_j in die obige Formel ein, so ergibt sich

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=0}^{n} (u|e_j)^2.$$

Zugleich ist für $i = 0, \ldots, n$

$$(u - v|e_i) = (u|e_i) - \Big(\sum_{j=1}^{n} (u|e_j)e_j \Big| e_i \Big) = (u|e_i) - (u|e_i) = 0,$$

d.h., $u - v$ steht auf allen Elementen von V_n senkrecht. $\square$

Definition 3:
Für eine Funktion $u \in V$ bezeichnet man die Zahlen $c_j := (u|e_j)$ als **Fourierkoeffizienten** der Funktion u.

Speziell für das trigonometrische Orthonormalsystem lassen sich die Fourierkoeffizienten durch folgende Formeln beschreiben:

$$(u|e_0) = \int_{-1}^{1} u(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx,$$

$$(u|e_{2k-1}) = \int_{-1}^{1} u(x) \sin(k\pi x) dx, \quad (u|e_{2k}) = \int_{-1}^{1} u(x) \cos(k\pi x) dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Beispiele für Fourierkoeffizienten

Beispiel 1. Es sei $u(x) = x^2$ für $x \in [-1, 1]$. Dann gilt

$$(u|e_0) = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$(u|e_{2k-1}) = \int_{-1}^{1} x^2 \sin(k\pi x) dx = 0, \text{ weil der Integrand eine ungerade Funktion ist,}$$

$$\begin{aligned} (u|e_{2k}) &= 2\int_{0}^{1} x^2 \cos(k\pi x) = -\frac{4}{k\pi} \int_{0}^{1} x \sin(k\pi x) dx \\ &= -\frac{4}{k^2\pi^2} \int_{0}^{1} \cos(k\pi x) dx + \Big[\frac{4}{k^2\pi^2} x \cos(k\pi x) \Big]_0^1 = \frac{4}{k^2\pi^2} \cos(k\pi) = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Beispiel 2. Es sei $u(x) = x$ für $x \in [-1, 1]$. Dann gilt

$$(u|e_0) = \int_{-1}^{1} x \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0,$$

$$(u|e_{2k-1}) = 2\int_{0}^{1} x \sin(k\pi x) dx = \frac{2}{k\pi} (-1)^{k-1} \qquad \text{(vgl. Beispiel 1) und}$$

$$(u|e_{2k}) = \int_{-1}^{1} x \cos(k\pi x) = 0, \text{ weil der Integrand eine ungerade Funktion ist.}$$

Die Darstellung von Funktionen und Näherungen sowie Satz 2 provozieren die Frage, ob eine Funktion $u \in V$ als *Grenzwert* der Näherungen v_n verstanden werden kann. Zur

Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, zunächst erst einmal festzulegen, was man unter Konvergenz einer Folge von Funktionen verstehen will.

Definition 4:

Man sagt, eine Folge (u_n) aus V **konvergiere im (quadratischen) Mittel** gegen $u^* \in V$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u^*\| = 0$ ist. Man sagt, eine Folge (u_n) aus V **konvergiere gleichmäßig** gegen $u^* \in V$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u^*\|_\infty = 0$ ist; dabei ist $\|v\|_\infty := \sup\limits_{x\in[-1,1]} |v(x)|$.

Dementsprechend nennt man eine *Reihe* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} v_j$ gleichmäßig (bzw. im quadratischen Mittel) konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $s_n := \sum\limits_{j=0}^{n} v_j$ gleichmäßig (bzw. im quadratischen Mittel) konvergiert.

Bemerkung: Für beliebiges $v \in V$ ist $\|v\|^2 = \int_{-1}^{1}(v(x))^2 dx \le 2\|v\|_\infty^2$. Deshalb folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge (u_n) gegen u^*, dass (u_n) auch im Mittel gegen u^* konvergiert. Das Umgekehrte ist im Allgemeinen nicht der Fall. Aus $\|u_n - u^*\|_\infty \longrightarrow 0$ folgt $u_n(x) \longrightarrow u^*(x)$ für alle $x \in [-1,1]$. Zudem gilt für beliebige $u, v \in V$ die Dreiecksungleichung $\|u+v\|_\infty \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. Das zeigt man wie folgt: Für jedes $x \in [-1,1]$ gilt

$$|(u+v)(x)| \le |u(x)| + |v(x)| \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Daher ist auch

$$\|u+v\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |(u+v)(x)| \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Ist von der Konvergenz einer Folge aus V die Rede, so muss immer angegeben werden, welche Konvergenz gemeint ist.

Satz 3. *Gilt für eine Folge (u_n) aus V die Beziehung $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\|_\infty = 0$, so konvergiert die Folge (u_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $u^* \in V$.*

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt $u_n(x) - u_m(x) \longrightarrow 0$ für $m, n \longrightarrow \infty$ und jedes $x \in [-1,1]$, d.h., für jedes $x \in [-1,1]$ ist $(u_n(x))$ eine Cauchyfolge von reellen Zahlen. Deshalb existiert $u^*(x) := \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ für $x \in [-1,1]$. Wir zeigen, dass u^* stetig ist und dass die Folge (u_n) gleichmäßig gegen u^* konvergiert.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für hinreichend große n, m ist nach Voraussetzung $\|u_n - u_m\|_\infty < \varepsilon$. Mit Hilfe dieser Ungleichung und der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen erhält man

$$|u_n(x) - u^*(x)| \le |u_n(x) - u_m(x)| + |u_m(x) - u^*(x)| \le \varepsilon + |u_m(x) - u^*(x)|.$$

Für $m \longrightarrow \infty$ ergibt sich $|u_n(x) - u^*(x)| \le \varepsilon$ für hinreichend große n. Da ε nicht von x abhängt, ist auch

$$\sup_{x\in[-1,1]} |u_n(x) - u^*(x)| \le \varepsilon \quad \text{für hinreichend große } n. \tag{8}$$

Für beliebige $x, x_0 \in [-1,1]$ ergibt sich (erneut mit Hilfe der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen)

$$\begin{aligned} |u^*(x) - u^*(x_0)| &\leq |u^*(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| + |u_n(x_0) - u^*(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{y\in[-1,1]} |u^*(y) - u_n(y)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| \leq 2\varepsilon + |u_n(x) - u_n(x_0)|, \end{aligned}$$

falls n hinreichend groß gewählt wird. Ein solches hinreichend großes n fixieren wir. Weil u_n stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $|u_n(x) - u_n(x_0)| < \varepsilon$ wird, falls $|x - x_0| < \delta$ ist. Folglich ist für $|x - x_0| < \delta$

$$|u^*(x) - u^*(x_0)| < 3\varepsilon,$$

d.h., die Funktion u^* ist stetig. Die Beziehung (8) besagt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u^*\|_\infty = 0$ ist; die Folge (u_n) konvergiert also gleichmäßig gegen u^*. □

Satz 4. *Konvergiert eine Reihe* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j e_j$ *im Mittel gegen eine Funktion* $u \in V$*, so sind die Zahlen* $c_0, c_1, \ldots$ *die Fourierkoeffizienten der Funktion* u *bezüglich* $(e_0, e_1, \ldots)$.

Beweis: Für $j = 0, 1, \ldots$ und $n \geq j$ gilt aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|(u|e_j) - c_j| = \left|\left(u - \sum_{i=0}^{n} c_i e_i \middle| e_j\right)\right| \leq \left\|u - \sum_{i=0}^{n} c_i e_i\right\| \|e_j\| = \left\|u - \sum_{i=0}^{n} c_i e_i\right\|.$$

Nach Voraussetzung konvergiert die obere Schranke für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0, und somit ist $(u|e_j) = c_j$. Folglich sind die Zahlen c_j, wie behauptet, die Fourierkoeffizienten der Funktion u. □

4. Spezielle Aussagen für das trigonometrische Orthonormalsystem

Von nun an sei $(e_0, e_1, \ldots)$ das trigonometrische Orthonormalsystem.

Satz 5. *Haben zwei Funktionen* u *und* v *aus* V *die gleichen Fourierkoeffizienten bezüglich* $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$*, so sind sie gleich.*

Beweis: Es sei $w := u - v$. Nach Voraussetzung ist $(w|e_j) = (u|e_j) - (v|e_j) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots$ Die Funktion w ist deshalb zu allen Elementen aller Räume V_n orthogonal. (Zur Definition von V_n siehe den Anfang von Abschnitt 3.) Zu zeigen ist $w = 0$. Wir nehmen an, es sei $w(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in]-1,1[$. Wir dürfen zusätzlich annehmen, dass $w(\xi) = 1$ ist (erforderlichenfalls multiplizieren wir w mit $\frac{1}{w(\xi)}$). Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass das Intervall $I_\delta := [\xi - 2\delta, \xi + 2\delta]$ in $[-1,1]$ liegt und dass $w(x) \geq \frac{1}{2}$ ist für $x \in I_\delta$. Es sei

$$p_n(x) := (1 + \cos(\pi(x - \xi)) - \cos(\pi\delta))^n \quad \text{für } x \in [-1,1] \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für Winkelfunktionen zeigt man induktiv leicht, dass $p_n \in V_{2n}$ ist. Folglich ist $(w|p_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Wahl von p_n ist so getroffen, dass

$p_n(x) \geq 1$ ist für $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$, $p_n(x) \geq 0$ für $x \in I_\delta$ und $q := \sup\limits_{x \in [-1,1] \setminus I_\delta} |p_1(x)| < 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (w|p_n) = \int_{-1}^{\xi-2\delta} w(x)p_n(x)dx + \int_{\xi-2\delta}^{\xi+2\delta} w(x)p_n(x)dx + \int_{\xi+2\delta}^{1} w(x)p_n(x)dx \\ &\geq -\int_{-1}^{\xi-2\delta} |w(x)|q^n dx + \delta - \int_{\xi+2\delta}^{1} |w(x)|q^n dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $n \longrightarrow \infty$ der Widerspruch $0 \geq \delta > 0$. Dieser Widerspruch widerlegt die Annahme, dass $w(\xi) \neq 0$ ist für ein $\xi \in]-1, 1[$. Deshalb muss $w = 0$ sein. □

Satz 6. *Konvergiert für gegebene Zahlen $c_0, c_1, \ldots$ die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |c_j|$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j e_j$ gleichmäßig gegen eine Funktion $u \in V$, und die Zahlen $c_0, c_1, \ldots$ sind die Fourierkoeffizienten dieser Funktion u.*

Beweis:
Schritt 1. Nach Satz 3 genügt es zum Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j e_j$ zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen $s_n := \sum\limits_{j=0}^{n} c_j e_j$ eine Cauchyfolge im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz ist. Dazu wird im Folgenden der Wert $\|s_n - s_m\|_\infty$ für $n, m \in \mathbb{N},\ m < n$, betrachtet. Es ist

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|_\infty &= \Big\| \sum_{j=m+1}^{n} c_j e_j \Big\|_\infty \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|c_j e_j\|_\infty \text{ (Dreiecksungl. für die Supremumsnorm)} \\ &= \sum_{j=m+1}^{n} |c_j| \|e_j\|_\infty = \sum_{j=m+1}^{n} |c_j|. \end{aligned}$$

Da $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |c_j|$ konvergiert, ist die Folge der Partialsummen $a_n := \sum\limits_{j=0}^{n} |c_j|$ nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium eine Cauchyfolge reeller Zahlen. Deshalb ist bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\|s_n - s_m\|_\infty \leq \sum_{j=m+1}^{n} |c_j| = a_n - a_m < \varepsilon \text{ für hinreichend große } m, n.$$

Schritt 2. Da die gleichmäßige Konvergenz die Konvergenz im quadratischen Mittel nach sich zieht, gilt nach Satz 4 die Beziehung $c_j = (u|e_j)$ für $j = 0, 1, \ldots$, d.h., die Zahlen c_j sind die Fourierkoeffizienten der Funktion u. □

Satz 7. *Es sei $u \in V$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zusätzlich gelte die Beziehung $u(-1) = u(1)$. Dann konvergiert die Fourierreihe von u gleichmäßig gegen u.*

Beweis: Für $k = 1, 2, \ldots$ ergibt sich unter Anwendung der Methode der partiellen Integration

$$\begin{aligned} c_{2k-1} &= \int_{-1}^{1} u(x)\sin(k\pi x)dx \\ &= \frac{1}{k\pi}\int_{-1}^{1} u'(x)\cos(k\pi x)dx + \left[u(x)\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi x)\right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{k^2\pi^2}\int_{-1}^{1} u''(x)\sin(k\pi x)dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \int_{-1}^{1} u(x)\cos(k\pi x)dx \\ &= -\frac{1}{k\pi}\int_{-1}^{1} u'(x)\sin(k\pi x)dx + \left[u(x)\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{k^2\pi^2}\int_{-1}^{1} u''(x)\cos(k\pi x)dx + \left[\frac{1}{k^2\pi^2}u'(x)\cos(k\pi x)\right]_{-1}^{1}. \end{aligned}$$

Folglich ist $|c_{2k-1}| \leq \frac{2\|u''\|_\infty}{k^2\pi^2}$ und $|c_{2k}| \leq \frac{2(\|u''\|_\infty + \|u'\|_\infty)}{k^2\pi^2}$ und damit $|c_j| \leq \frac{M}{j^2}$ für $M := \frac{8(\|u''\|_\infty + \|u'\|_\infty)}{\pi^2}$ und $j > 0$. Es ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = 1 + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) < \infty,$$

denn die Partialsummen der letzten Reihe sind $\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) = 1 - \frac{1}{n}$. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|$, und die Behauptung des Satzes ist eine Konsequenz der Sätze 6 und 5. Satz 6 garantiert, dass die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j e_j$ gleichmäßig gegen eine Funktion v konvergiert, deren Fourierkoeffizienten die Zahlen c_j sind. Da die Zahlen c_j die Fourierkoeffizienten von u sind, ist $v = u$ nach Satz 5. □

Beispiel. Es sei $u(x) = x^2$ für $x \in [-1, 1]$. Die so definierte Funktion u genügt den Voraussetzungen von Satz 7. Die Fourierkoeffizienten von u sind schon in Abschnitt 3 berechnet worden. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Fourierreihe von u gegen u gilt für alle $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} x^2 &= c_0\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\cos(k\pi x) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi x). \end{aligned}$$

Aus der Gleichung für $x = 1$ folgt nach einfachen Umformungen

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Aus der Gleichung für $x = 0$ folgt ebenso

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Satz 8. *Es seien $u \in V$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine Funktion $v \in V$ mit folgenden Eigenschaften:*
1. *Die Funktion v ist auf $[-1, 1]$ zweimal stetig differenzierbar und genügt der Bedingung $v(-1) = v(1)$.*
2. *Es ist $\|v - u\| < \varepsilon$.*

Beweis: Wir setzen zunächst

$$w(x) := \frac{1}{\eta^2} \int_x^{x+\eta} \int_y^{y+\eta} u(z) dz\, dy \quad \text{für } x \in [-1, 1];$$

dabei sei $u(z) := u(1)$ für $z > 1$, und $\eta > 0$ sei eine Zahl, über die später noch geeignet verfügt wird. Die Funktion w ist zweimal stetig differenzierbar: Es ist

$$w'(x) = \frac{1}{\eta^2} \left(\int_{x+\eta}^{x+2\eta} u(z) dz - \int_x^{x+\eta} u(z) dz \right)$$

und

$$w''(x) = \frac{1}{\eta^2}(u(x + 2\eta) - 2u(x + \eta) + u(x)).$$

Weiter gilt

$$w(x) - u(x) = \frac{1}{\eta} \int_x^{x+\eta} \left(\frac{1}{\eta} \int_y^{y+\eta} u(z) dz - u(x) \right) dy = \frac{1}{\eta} \int_x^{x+\eta} \frac{1}{\eta} \int_y^{y+\eta} (u(z) - u(x)) dz\, dy.$$

Die Variable z in dem inneren Integral bleibt immer im Intervall $[x, x + 2\eta]$. Deshalb wird

$$|w(x) - u(x)| \le \frac{1}{\eta} \int_x^{x+\eta} \frac{1}{\eta} \int_y^{y+\eta} |u(z) - u(x)| dz\, dy \le \sup_{|z-x| \le 2\eta} |u(z) - u(x)|.$$

Wir wählen nun $\eta > 0$ (unabhängig von x) so klein, dass $|u(z) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ wird, falls $|z - x| < 2\eta$ ist. Dann wird $|w(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $x \in [-1, 1]$ und daher

$$\|w - u\|^2 = \int_{-1}^{1} (w(x) - u(x))^2 dx \le \frac{\varepsilon^2}{8}, \quad \text{also erst recht } \|w - u\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Als nächstes wählen wir eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\psi \in V$ mit den Eigenschaften $0 \le \psi(x) \le 1$ für alle $x \in [-1, 1]$, $\psi(x) = 1$ für $x \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$ sowie

$\psi(-1) = \psi(1) = 0$; dabei wird über $\delta > 0$ noch passend verfügt. Wir setzen schließlich $v := \psi w$. Dann ist v zweimal stetig differenzierbar und $v(-1) = v(1) = 0$. Außerdem gilt

$$\|v - w\|^2 = \int_{-1}^{1} (\psi(x)w(x) - w(x))^2 dx \leq \int_{-1}^{-1+\delta} (w(x))^2 dx + \int_{1-\delta}^{1} (w(x))^2 dx \leq 2\delta \|w\|_\infty^2.$$

Wir wählen nun $\delta > 0$ so, dass $2\delta\|w\|_\infty^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$ ist. Dann wird $\|v - w\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Zusammen mit der Abschätzung für $\|w - u\|$ ergibt sich $\|v - u\| \leq \|v - w\| + \|w - u\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Die Funktion v hat also die gewünschten Eigenschaften. □

Satz 9. *Die Fourierreihe jeder Funktion $u \in V$ konvergiert im Mittel gegen u.*

Beweis: Für den Beweis muss gezeigt werden, dass der Wert $\left\|u - \sum_{j=0}^{n} (u|e_j)e_j\right\|$ für hinreichend große n kleiner wird als jedes $\varepsilon > 0$. Dazu wird zunächst Satz 8 benutzt. Nach diesem existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion u_ε mit den Eigenschaften $u_\varepsilon(-1) = u_\varepsilon(1)$ und $\|u_\varepsilon - u\| < \varepsilon$. Wir bestimmen $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left\|u_\varepsilon - \sum_{j=0}^{n} (u_\varepsilon|e_j)e_j\right\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N.$$

Das ist möglich, weil die Fourierreihe von u_ε nach Satz 7 gleichmäßig (und damit erst recht im quadratischen Mittel) gegen u_ε konvergiert. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung ergibt sich daraus und aus der Ungleichung $\|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon$ die Aussage

$$\left\|u - \sum_{j=0}^{n} (u_\varepsilon|e_j)e_j\right\| \leq \|u - u_\varepsilon\| + \left\|u_\varepsilon - \sum_{j=0}^{n} (u_\varepsilon|e_j)e_j\right\| < 2\varepsilon \quad \text{für } n \geq N.$$

Es ist $\sum_{j=0}^{n} (u_\varepsilon|e_j)e_j \in V_n$. Nach Satz 2 ist die bestmögliche Approximation von u durch ein Element aus V_n die Partialsumme $\sum_{j=0}^{n} (u|e_j)e_j$ der Fourierreihe von u. Folglich gilt auch

$$\left\|u - \sum_{j=0}^{n} (u|e_j)e_j\right\| < 2\varepsilon \quad \text{für } n \geq N.$$

Wegen der Willkür von $\varepsilon > 0$ beweist das, dass die Fourierreihe von u im Mittel gegen u konvergiert. □

Ergänzende Bemerkung

Es gibt im Raum V der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ Folgen (u_n), für die $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0$ ist, die in V keinen Grenzwert im Sinne der Konvergenz im Mittel besitzen. Dieser Mangel lässt sich beseitigen, indem man von dem Raum V in geeigneter Weise zu einem größeren Raum U übergeht. Erst in diesem Raum U wird die

Theorie der Fourierreihen völlig befriedigend. Es lässt sich zeigen, dass eine Fourierreihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j e_j$ genau dann im Mittel gegen ein Element $u \in U$ konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2$ konvergiert. Es besteht dann eine bijektive Beziehung zwischen den Elementen u des Raums U und den Folgen $(c_0, c_1, \ldots)$, für die $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2$ konvergiert. Die Zahlen $c_0, c_1, \ldots$ lassen sich als Koordinaten des Elements u bezüglich der Basis $e_0, e_1, \ldots$ verstehen. Rechenoperationen mit den Elementen von U lassen sich in Operationen für die Koordinaten „übersetzen". Eine befriedigende Beschreibung des hier erwähnten Raums U erfordert allerdings die Kenntnis des sogenannten Lebesgue-Integrals.