Differentialgleichungen

Gliederung

1) Natürliche Logarithmus-& Exponentialfunktion

2) Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

3) Berechnung eines Kredits

- Entwicklung eines Guthabens (Schuldenberges)

1) Natürliche Logarithmus-& Exponentialfunktion

Def.: Die Funktion der Form

$$\ln t = \int_1^t \left(\frac{1}{x}\right) dx \quad , \qquad t \in \left]0, \infty\right[$$

heißt natürliche Logarithmusfunktion (logarithmus naturales).

Def.: Exponentialfunktion: $e^x := \ln^{-1}(x), x \in R$

2) Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

Lemma: Vorraussetzung: gegeben ist ein Intervall $I \subseteq R$,

$$t_0 \in I, \quad a : I \xrightarrow{c^1} R.$$

Behauptung: $g(t) = e^{\int_{t0}^{t} a(x)dx}$

ist Lösung von

$$g`(t) = a(t)g(t) \quad , t \in I, \quad \text{und} \quad g(t_0) = 1$$

Beweis:

$$\mathrm{A(t)} := \int_{t_0}^{t} a(x)\,dx$$

Dann gilt: $A'(t) = a(t)$

$$g(t) := e^{A(t)}$$

$$\Rightarrow g'(t) = e^{A(t)} A'(t) = a(t) e^{A(t)} = a(t) g(t)$$

und $g(t_0) = e^{A(t_0)} = e^0 = 1$

Satz: Vorraussetzung: gegeben ist ein

Intervall $I \subseteq R$

$$a, b : I \xrightarrow{c^1} R, \; t_0 \in I, \; K \in R$$

Dann existiert genau ein f: $I \xrightarrow{c^1} R$

mit f `(t)= a(t)f(t) + b(t) $, t \in I,$

und $f(t_0) = K.$

Beweis der Eindeutigkeits-aussage:

Sei f Lösung, d.h., f `(t)= a(t)f(t)+b(t) , $t \in I$,
und $f(t_0) = K$.

Sei $g(t)$ die Funktion aus dem Lemma.

$$\gamma(t) := \frac{f(t)}{g(t)} \Leftrightarrow f(t) = \gamma(t)g(t)$$

$$\Rightarrow f'(t) = \gamma(t)g'(t) + \gamma'(t)g(t)$$

Nach dem Lemma gilt: $g'(t) = a(t)g(t)$

$$\Rightarrow f'(t) = \gamma(t)a(t)g(t) + \gamma'(t)g(t)$$

Es gilt: $f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$

$$a(t)f(t) + b(t) = a(t)\gamma(t)g(t) + \gamma'(t)g(t)$$

Es gilt: $f(t) = \gamma(t)g(t)$

$$b(t) = \gamma'(t)g(t)$$

$$\gamma'(t) = \frac{b(t)}{g(t)} \Leftrightarrow \gamma(t) = C + \int_{t_0}^{t} \frac{b(x)}{g(x)} dx \quad , C \in R$$

Es gilt: $$\gamma(t_0) = C + \int_{t_0}^{t_0} \frac{b(x)}{g(x)} dx$$

$$C = \gamma(t_0) = \frac{f(t_0)}{g(t_0)} = \frac{K}{1} = K$$

$$\gamma(t) = K + \int_{t_0}^{t} \frac{b(x)}{g(x)} dx$$

Es gilt: $f(t) = g(t)\gamma(t)$

$$\Rightarrow f(t) = g(t)\left(K + \int_{t_0}^{t} \frac{b(x)}{g(x)}\,dx \right).$$

Beweis der Existenz:

$$f(t_0) = K + 1x0 = K$$

$$f'(t) = Ka(t)g(t) + a(t)g(t)\int_{t_0}^{t} \frac{b(x)}{g(x)}dx + g(t)\frac{b(t)}{g(t)}$$

$$\Leftrightarrow f'(t) = a(t)\left(Kg(t) + g(t)\int_{t_0}^{t} \frac{b(x)}{g(x)}dx \right) + b(t)$$

Es gilt:

$$f(t) = g(t)\left(K + \int_{t_0}^{t} \frac{b(x)}{g(x)}\,dx\right)$$

f `(t)=a(t)f(t) + b(t)

q.e.d.

Spezialfall: a,b sind beide Konstanten, dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung f:

$$f(t) = K\,e^{a(t-t_0)} + e^{a(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \frac{b}{e^{a(x-t_0)}}\,dx$$

$$\Leftrightarrow f(t) = e^{a(t-t_0)}\left(K + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}$$

3) Berechnung eines Kredits

K - Anfangsguthaben(-schulden)

K = f(0) , f(t)=Guthaben (Schulden) zur Zeit t

$\frac{p}{100} f(t)dt$ - Zinsen zur Zeit t pro dt

r - Abzahlung pro Jahr

rdt - Abzahlung zur Zeit t pro dt

$$df(t) = \frac{p}{100} f(t)dt + rdt$$

$$\Leftrightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{p}{100} f(t) + r$$

$$\Leftrightarrow f'(t) = \underbrace{\frac{p}{100}}_{a} f(t) + \underbrace{r}_{b}$$

Es gilt: $f(t) = e^{a(t-t_0)}\left(K + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}$

$$f(t) = e^{\frac{p}{100}t}\left(K + 100\frac{r}{p}\right) - 100\frac{r}{p}$$

Berechnen des Zeitpunktes T an dem der Kredit abgezahlt sein wird:

$$f(T) = 0 = e^{\frac{p}{100}T}\left(K + 100\frac{r}{p}\right) - 100\frac{r}{p}$$

1.Fall: $$K + 100\frac{r}{p} < 0$$

2.Fall: $$K + 100\frac{r}{p} = 0$$

3.Fall: $K + 100\dfrac{r}{p} > 0$

$$T = \frac{100}{p}\ln\left(\frac{100\dfrac{r}{p}}{K + 100\dfrac{r}{p}}\right)$$

$$r = -\frac{Kp\,e^{\frac{p}{100}T}}{100e^{\frac{p}{100}T} - 100}$$

ENDE