MATHEMATIK UND VERSICHERUNGEN – EINE ALLIANZ FÜRS LEBEN

Teilnehmer:

Thomas Benkert	Graf-Münster-Gymnasium
Sebastian Flach	Graf-Münster-Gymnasium
Wolfgang Schmidt	Graf-Münster-Gymnasium
Philip Wanninger	Graf-Münster-Gymnasium
Sebastian Schubert	Andreas-Oberschule

Gruppenleiter:

Peggy Daume	Humboldt-Universität, Mitglied im DFG-Forschungszentrum „Mathematik für Schlüsseltechnologien“

Nach einer Einführung in die wirtschaftliche Welt der Versicherungen beschäftigte sich unsere Gruppe zunächst mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen. Dabei beschränkten wir uns auf die Begriffe der Zufallsgröße, des Erwartungswertes, der Varianz und des fairen Spiels.

Der Erwartungswert und das faire Spiel begegneten uns wieder im Äquivalenzprinzip, mit dem die Berechnung einer Nettoprämie für eine Lebensversicherung auf den Erlebensfall und für eine Versicherung auf den Todesfall erfolgte. Als nützliches Werkzeug zur Bestimmung der für die Nettoprämie notwendigen Todes- und Überlebenswahrscheinlichkeiten lernten wir dabei Sterbetafeln kennen.

Mathematik und Versicherungen – eine Allianz fürs Leben

1 Juristische Definition

„Versicherungsgeschäfte betreibt, wer, ohne daß ein innerer Zusammenhang mit einem Rechtsgeschäft anderer Art besteht, gegen Entgelt verpflichtet ist ein wirtschaftliches Risiko dergestalt zu übernehmen, daß er

a) anderen vermögenswerte Leistungen zu erbringen hat, wenn sich eine für deren wirtschaftliche Verhältnisse nachteilige, ihren Eintritt nach ungewisse Tatsache *ereignet, um die dadurch verursachten Nachteile auszugleichen, oder*

b) anderen vermögenswerte Leistungen zu erbringen hat, wobei es von der Dauer des Lebens oder dem Eintritt oder dem Nichteintritt einer Tatsache *im Laufe des menschlichen Lebens abhängt, ob oder wann in welchem Umfang zu leisten oder wie hoch das Entgelt ist,*

sofern der Risikoübernahme einer Kalkulation zugrunde liegt, wonach die dazu erforderlichen Mittel ganz oder im wesentlichen ganz durch die Gesamtheit der Entgelte aufgebracht werden.“ (Versicherungsaufsichtsgesetz)

Aus der oben aufgeführten Definition ist zu erkennen, dass Versicherungen ungewisse/unvorhersehbare Ereignisse enthalten. Aus diesem Grund beschäftigten wir uns zunächst mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffen und Definitionen.

2 Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1 Zufallsgrößen

Sei Ω die Ergebnismenge eines Vorganges mit zufälligem Ergebnis. Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow R$ heißt Zufallsgröße. Dabei wird jedem Ergebnis ω aus der Ergebnismenge Ω durch die Zufallsgröße X eine reelle Zahl X(ω) zugeordnet. Durch Zufallsgrößen werden also messbare, in Zahlen ausdrückbare Eigenschaften der Ergebnisse erfasst. Die Verteilungen von Zufallsgrößen werden meist in Tabellenform angegeben.

Beispiel: Der Gewinnplan eines Würfelspiels sieht vor, nach dem Werfen dreier Würfel €2,00 auszuzahlen, wenn genau eine Sechs erscheint, €4,00 zu zahlen, wenn genau zwei Sechsen fallen und €8,00 zu zahlen, wenn alle drei Würfel eine Sechs zeigen. Der Einsatz des Spiels beträgt €1,20. In der folgenden Tabelle sind alle möglichen Werte des Nettogewinns (Differenz von Auszahlung und Einsatz) und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten angegeben.

Nettogewinn in €	$-1,20$	$0,80$	$2,20$	$6,80$
Wahrscheinlichkeit	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Für alle $A \subseteq \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ P(\oslash) &= 0 \\ P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

2.2 Erwartungswert einer Zufallsgröße

Wir betrachten erneut unser Beispiel mit den Würfeln und interessieren uns für folgendes Problem: **Wie groß ist der durchschnittliche Nettogewinn, den man erzielen kann?**

Als Durchschnittswert aus vielen Beobachtungen ergibt sich in unserem Beispiel die Vorhersage:

$$E(G) = -1,20 \cdot \frac{125}{216} + 0,80 \cdot \frac{75}{216} + 2,80 \cdot \frac{15}{216} + 6,80 \cdot \frac{1}{216} = -0,19.$$

Der Spieler verliert im Schnitt pro Spiel €0,19. Dieser Durchschnittswert kann auch als Erwartungswert angesehen werden.

Definition: Sei X eine Zufallsgröße mit der folgenden Verteilung.

$X = x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Die Zahl $E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n$ heißt Erwartungswert der Zufallsgröße X.

Ein Spiel heißt fair, wenn der Erwartungswert $E(X)$ des Reingewinns null ist. Andernfalls heißt das Spiel günstig oder ungünstig für den Spieler.

Generell gilt:

Ist $E(G) > 0$, so ist das Spiel für den Spieler günstig.
Ist $E(G) < 0$, so ist das spiel für den Spieler ungünstig.
Ist $E(G) = 0$, so ist das Spiel fair.

Daraus folgt: In unserem Beispiel handelt es sich um ein für den Spieler ungünstiges Spiel.

Eigenschaften des Erwartungswertes:

Es seien X und Y Zufallsgrößen. Dann gilt für alle $a, b \in R$:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aE(X) + b, \\ E(X + Y) &= E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

2.3 Varianz einer Zufallsgröße

Der Vollständigkeit halber definieren wir den Begriff der Varianz einer Zufallsgröße, auch wenn diese nicht für die Versicherungsmathematik benötigt wird.

Definition: Es sei X eine Zufallsgröße mit folgender Verteilung.

$X = x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Die Zahl $Var(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(X))^2 \cdot p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$ heißt Varianz von X. $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ heißt Standardabweichung.

3 Arten der Lebensversicherung

In der Lebensversicherungsmathematik unterscheidet man Versicherungen auf den Todesfall, auf den Erlebensfall sowie Mischformen beider.

1. Versicherungen auf den Todesfall
   - Absicherung der Hinterbliebenen
   - Versicherungsleistung wird fällig, wenn der Versicherungsnehmer innerhalb des Versicherungszeitraums stirbt
2. Versicherung auf den Erlebensfall
   - Absicherung des Versicherungsnehmers
   - Versicherungsleistung wird fällig, wenn der Versicherungsnehmer den Versicherungszeitraum überlebt
3. Gemischte kapitalbildende Lebensversicherung
   - Mischform aus Versicherung auf Erlebens- und Todesfall

4 Sterbetafeln

Bei einer Risiko- oder Kapitallebensversicherung hängen der Leistungsumfang der Versicherungen und die Zahlungsleistungen der Versicherungsnehmer vom zufälligen Zeitpunkt seines Todes ab.

Bsp: Frau X: 40 Jahre alt, schließt eine Lebensversicherung auf den Todesfall mit 2 Jahren Laufzeit und einer Versicherungssumme über €50.000 ab. Den Betrag zahlt sie jährlich im Voraus. Wird die Versicherungsumme fällig, dann erfolgt die Zahlung üblicherweise am Ende des Versicherungsjahres. Für das Zufallsgeschehen sind folgende drei Szenarien denkbar:

a) Frau X stirbt im 1. Jahr:
   - 1 Jahresbeitrag bezahlt
   - Versicherung zahlt nach 1 Jahr €50.000

b) Frau X stirbt im 2. Jahr:
   - 2 Jahresbeiträge bezahlt
   - Versicherung zahlt nach zwei Jahren €50.000

c) Frau X stirbt nicht:

   – 2 Jahresbeiträge bezahlt
   – Versicherung zahlt nichts

Die (erwartete) Größe der zu zahlenden Versicherungsleistungen und der eingenommen Prämien berechnen wir mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsaussagen über die zufällige Lebensdauer der Menschen, die in sogenannten Sterbetafeln verankert sind. Da die zufällige Lebensdauer abhängig vom Geschlecht ist, gibt es Sterbetafeln für Männer und Frauen. Weitere Einflussfaktoren (Gesundheitszustand, Region, ...) bleiben meist unberücksichtigt. Die Sterbewahrscheinlichkeiten in den Sterbetafeln beruhen auf statistische Beobachtungen.

4.1 Die Bedeutung von q_x und q_y

Die Sterbetafel (siehe Anhang) gibt zu jedem Alter x bzw. y und getrennt nach Geschlechtern (x = Männer, y = Frauen) die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit q_x bzw. q_y dafür an, dass eine x-jährige (bzw. y-jährige) Person das Alter $x + 1$ bzw. $y+1$ nicht erreicht. (Achtung: In der Versicherungsmathematik geben x und y sowohl das Alter als auch das Geschlecht an.) Gibt T_x die zufällige restliche Lebensdauer (es wird immer in ganzen Jahren gerechnet) ab dem Alter x an, so gilt:

$$q_x = P(T_x < 1).$$

Mit Hilfe der Regeln der Wahrscheinlichkeitsberechnung erhalten wir unsere einjährige Lebenswahrscheinlichkeit mit

$$\begin{aligned} p_x &= 1 - q_x \\ P(T_x \geq 1) &= 1 - P(T_x < 1). \end{aligned}$$

Verträglichkeitsannahme:

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger das Alter $s+t$ erreicht, ergibt sich als Produkt der Wahrscheinlichkeiten, dass er zunächst s Jahre überlebt und dann als $x + s$ jähriger noch mindestens t weitere Jahre überlebt.

Wir vereinbaren für die n-jährige überlebenswahrscheinlichkeit die Schreibweise $_np_x$. Für eine beliebige n-jährige überlebenswahrscheinlichkeit gilt nach der Verträglichkeitsbedingung:

$$_np_x =_1 p_x \cdot_1 p_{x+1} \cdot \dots \cdot_1 p_{x+n-1}.$$

Die erwartete Anzahl der Lebenden des Alters x wird durch l_x und l_y beschrieben. Dabei wird von anfangs 100.000 Neugeborenen ausgegangen. Es gilt:

$$l_x = 100.000 \cdot_x p_0.$$

Zwischen l_x und $_np_x$ gilt folgender Zusammenhang: Für beliebige überlebenswahrscheinlichkeiten gilt:

$$l_{x+n} = l_x \cdot_n p_x. \tag{1}$$

5 Äquivalenzprinzip

Die zentrale Frage unserer Untersuchungen lautete: Wie hoch sollen die Beträge der Versicherten sein, die jetzt im Voraus zu zahlen sind, damit sie den in der Zukunft liegenden Gegenleistungen des Versicherers mit hoher Wahrscheinlichkeit entsprechen? Man berechnet diesen Teil der LV-Prämie, die Nettoprämie, indem man von einem fairen Spiel ausgeht, das Gewinne und Kosten des Versicherungsunternehmens vernachlässigt.

$$\boxed{\text{Summe der Prämie aller Versicherten eines LV-Unternehmens}} = \boxed{\text{Summe der Zahlungen des LV-Unternehmens an die betroffenen Versicherten}}$$

Als Grundlagen der Kalkulation der Nettoprämie dienen die folgenden Modellannahmen:

– Die Nettoprämie ist proportional zur Versicherungssumme. Diese wiederum wird vereinbart und ihre Auszahlung ist nicht an eine Schadenshöhe gebunden.

– Um die diversen Zahlungen vergleichbar zu machen, werden sie auf einen bestimmten Tag bezogen, sie werden diskontiert.

– Die Höhe der Nettoprämie ist abhängig vom Risiko und dem Sterbealter der Versicherten.

In der Finanzmathematik wird davon ausgegangen, dass Geldbeträge durch Zinsen und Zinseszinsen wachsen. Ein Betrag k_0, der heute zu zahlen ist, hat in n Jahren bei i % Jahreszins den Wert $k_n = k_0(1 + \frac{i}{100})^n := r^n \cdot k_0$. Umgekehrt hat ein Betrag k_n, der in n Jahren fällig ist, bei i % Jahreszinssatz heute den Barwert $k_0 = \frac{k_n}{r^n} := v^n \cdot k_0$. Die Faktoren r und v werden auch Aufzinsungs- und Abzinsungsfaktoren genannt.

Beispiel: Frau X, 40 Jahre alt, schließt eine Lebensversicherung auf Todesfall über €50.000 und mit einer Laufzeit von 2 Jahren ab.Die Höhe der von ihr zu zahlenden Prämie sie N. Dann ergibt sich für die Verteilung der Versicherungsleistung und der Prämiezahlung Folgende:

restl. Lebensdauer	0	1	≥ 2
Prämienzahlung	N	$N + \frac{N}{1{,}0325}$	$N + \frac{N}{1{,}0325}$
Leistung	$\frac{50.0000}{1{,}0325}$	$\frac{50.000}{(1{,}0325)^2}$	0
Wahrscheinlichkeiten	$\frac{1{,}524}{1000}$	$\frac{1{,}669}{1000}$	$\frac{996{,}8}{1000}$

Für die erwarte Prämienleistung $E(P_{40})$ und die erwartete Versicherungsleistung $E(L_{40})$ ergibt sich:

$$E(P_{40}) = N \cdot \frac{1,524}{1000} + (N + \frac{N}{1,0325}) \cdot \frac{1,699}{1000} + (N + \frac{N}{1,0325}) \cdot 0,997 = 1,968N$$

$$E(L_{40}) = \frac{50.0000}{1,0325} \cdot \frac{1,524}{1000} + \frac{50.000}{(1,0325)^2} \cdot \frac{1,669}{1000} = 152,10$$

Nach dem Äquivalenzprinzip gilt:

$$\begin{aligned} E(L_{40}) &= E(P_{40}) \\ 152,10 &= 1,968N \\ N &= 77,28 \end{aligned}$$

Die Nettoprämie für die Versicherung von Frau X beträgt fairerweise €77,28. Die im Internet für Frau X gefundenen Zahlbeiträge lagen zwischen €76,65 und €175,99.

Zum Vergleich erfolgt die Berechnung der Lebensversicherung auf Erlebensfall.
Beispiel: Herr Y, 40 Jahre alt, schließt eine Lebensversicherung auf Erlebensfall über €50.000 und einer Laufzeit von 2 Jahren ab. Dann ergibt sich für die Versicherungsleistung und die Prämienzahlung folgende Verteilung:

restl. Lebensdauer	0	1	≥ 2
Prämienzahlung	N	$N + \frac{N}{1{,}0325}$	$N + \frac{N}{1{,}0325}$
Leistung	0	0	$\frac{50.000}{(1{,}0325)^2}$
Wahrscheinlichkeit	$\frac{2{,}569}{1000}$	$\frac{2{,}816}{1000}$	$0,995$

Die Berechnungen für die erwartete Prämienzahlung bzw. die erwartete Leistung ergeben folgende Werte:

$$\begin{aligned} E(P_{40}) &= 1,966N \\ E(L_{40}) &= 46901 \\ N &= 23.856,48 \end{aligned}$$

Die Nettoprämie beträgt fairerweise €23.856,48.
Nachdem wir zunächst einige konkrete Nettoprämien in verschiedenen Beispielen ausgerechnet hatten, gingen wir dazu über, allgemeine Formeln zu entwickeln.

5.1 n-jährige Lebenversicherung auf den Todesfall für eine männliche Person des Alters x

Im Folgenden geben wir nur die allgemeinen Formeln zur Berechnung der erwarteten Leistungszahlungen $E(L_x)$ und erwarteten Prämienzahlungen $E(P_x)$ an. Auf eine Herleitung verzichten wir. Zur Berechnung der Nettoprämie muss nach dem Äquivalenzprinzip gelten: $E(P_x) = E(L_x)$.

Erklärung der verwendeten Variablen:

S : Versicherungsleistung der Versicherung
v : Abzinsungsfaktor mit $v = \frac{1}{i}$, wobei i Rechnungszinssatz
N : Nettoprämie
k : „abgelaufene Jahre“

Berechnung der erwarteten Leistungszahlung: Für die erwartete Leistungszahlung gilt:

$$E(L_x) = N \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}.$$

Mit der Beziehung (1) erhalten wir für $E(L_x)$ schließlich:

$$E(L_x) = N \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}(l_{x+k} - l_{x+k+1}).$$

Berechnung der erwarteten Prämienzahlung: Für die erwartete Prämienzahlung gilt:

$$E(P_x) = S \cdot \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^k l_{x+k}.$$

5.2 n-jährige Lebenversicherung auf den Erlebensfall für eine männliche Person des Alters x

Berechnung der erwarteten Leistungszahlung: Für die erwartete Leistungszahlung gilt:

$$E(L_x) = S \cdot v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Berechnung der erwarteten Prämienzahlung: Für die erwartete Prämienzahlung gilt:

$$E(P_x) = N \cdot \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot l_{x+k}.$$

5.3 n-jährige gemischte Kapitallebensversicherung für eine männliche Person des Alters x

Berechnung der erwarteten Leistungszahlung: Ist T die Versicherungsleistung im Todesfall und W ist die Versicherungsleistung im Erlebensfall, so gilt für die erwartete Leistungszahlung:

$$E(L_x) = W \cdot v^n \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} + \frac{T}{l_x} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot (l_{x+k} - l_{x+k+1}).$$

Berechnung der erwarteten Prämienzahlung: Für die erwartete Prämienzahlung gilt:

$$E(P_x) = N \cdot \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot l_{x+k}.$$

6 Warum zahlt man mehr als die Nettoprämie?

Bei sehr vielen Verträgen würde es mit sehr großer Wahrscheinlichkeit mindestens einmal vorkommen, dass die Summe der beanspruchten Leistungen größer ist als die Summe der eingenommenen Prämien. Das Versicherungsunternehmen ist in diesem Fall vom sogenannten versicherungstechnischen Ruin bedroht. Versicherungsunternehmen sind gesetzlich verpflichtet sich dagegen zu schützen. Daher werden beispielsweise individuelle Risikozuschläge (für Raucher, bestimmte Vorerkrankungen, Suchtkranke) für die einzelnen Versicherungsverträge eingearbeitet. Diese Risiken sind in Sterbetafeln nicht verankert. Versicherungsverträge verursachen Abschluss- und Verwaltungskosten. Diese Kosten werden bei der Berechnung des Versicherungsbeitrages berücksichtigt.