Kapitel 1

Einleitende Worte

Die Gruppe beschäftigte sich mit Gleichgewichtszuständen kosmischer Systeme. Es wurde deutlich, dass in längerfristig stabilen Systemen immer ein dynamisches Gleichgewicht zwischen der Gravitation und Bewegungsgrößen besteht. Während die Gravitation als immer anziehende Kraft stets eine Annährung der Materie bewirkt, sucht die mit Impuls und kinetischer Energie behaftete Materie stets das Weite. Dies gilt in besonderem Maße auch für die elektromagnetische Strahlung, die nur in Bewegung - mit Lichtgeschwindigkeit - existiert. Als Beispiel für ein dynamisches System wurde ein Stern (wie die Sonne) betrachtet. Zur Klärung der Begriffe Potentielle und Kinetische Energie, Entweichgeschwindigkeit, Kräfte- und Energiegleichgewicht, Drehimpulserhaltung wurde die Bewegung eines Planeten auf einer elliptischen bzw. Kreisbahn um die Sonne untersucht (Keplersche Gesetze).

Im Stern, einer heißen Gaskugel, lassen sich verschiedene Gleichgewichte definieren:

1. Das hydrostatische Gleichgewicht bedeutet das Gleichgewicht zwischen der durch die Masse des Sterns bewirkten Gravitationskraft (Schwerkraft) und den Druckkräften im Sternglas, in welchen die „Bewegungsgröße“ als kinetische Energie der Atome auftritt, charakterisiert durch die Temperatur.

2. Ein zweites Gleichgewicht, das man auch als Erhaltungssatz beschreiben kann, tritt zutage, wenn man die auffälligste Eigenschaft eines Sterns, nämlich dass er leuchtet, d.h. ständig Strahlungsenergie abgibt, näher betrachtet . Die Strahlung wird im Innern des Sterns produziert und muss nach außen gelangen und den Stern verlassen, damit dieser nicht aus dem (hydrostatischen) Gleichgewicht gerät. Die Energieerzeugungsrate muss also zu jeder Zeit gleich der abgestrahlten Energie sein.
Aus diesen Bedingungen ergeben sich Differentialgleichungen für Temperatur-, Druck- und Leuchtkraftverlauf vom Zentrum des Sterns bis zum Rand. Die Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen erfordert noch weitere Kenntnis der Energieerzeugung und das Absorptions- und Emissionsverhaltens der Sternmaterie, die ebenfalls diskutiert wurden.

Kapitel 2

Physikalische und mathematische Voraussetzungen

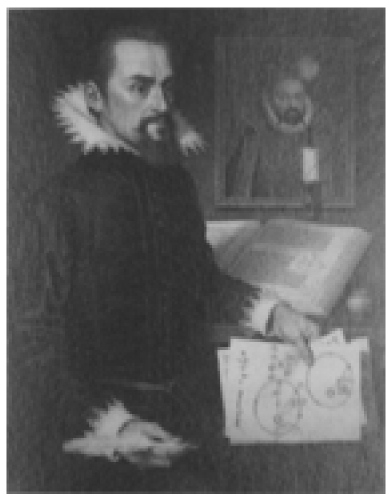

Abbildung 2.1: Portrait von Kepler

Johannes Kepler (*1571 - †1630) formulierte aufgrund seiner Beobachtungen folgende Gesetzmäßigkeiten:

2.1 Das 1. Keplersche Gesetz

Die Planeten laufen auf Ellipsen um die Sonne und diese steht in einem Brennpunkt dieser Ellipse.

2.2 Das 2. Keplersche Gesetz

Der Leitstrahl vom Planeten zur Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. D.h. der Quotient aus der Fläche A und der benötigten Zeit ist konstant:

$$\frac{A}{t} = konstant$$

Der Leitstrahl ist diejenige gedachte Verbindungslinie zwischen Brennpunkt der Ellipse und einem Planeten, der sich auf der Ellipsenbahn befindet.

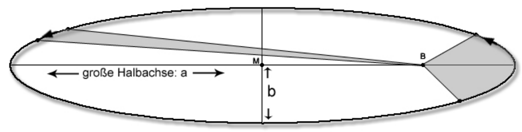

Abbildung 2.2: Illustration des 2. Keplerschen Gesetzes

2.3 Das 3. Keplersche Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten T verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen. Es gilt:

$$T^2 \sim a^3$$

Wir bezeichnen hier a als große Halbachse, womit der größte Abstand vom Mittelpunkt zur Ellipsenbahn gemeint ist. Demgegenüber sei b, die kleine Halbachse, gerade der kleinste Abstand vom Mittelpunkt zur Ellipsenbahn.

Wir folgern:

$$\frac{(T_1)^2}{(T_2)^2} = \frac{(a_1)^3}{(a_2)^3}$$

Dem zuletzt am 08.06.2004 beobachteten Venustransit wurde seit dem 17. Jh. eine große Bedeutung zugemessen, da man durch Beobachtung des Transits von zwei entfernten Punkten auf der Erde aus den Abstand der Erde zur Sonne ermitteln kann. Am besten gelang dies im Jahre 1882. Mit dieser einen Größe war es nun möglich (die Umlaufzeiten waren ja bekannt) alle anderen Entfernungen zu berechnen:

$$(a_{Planet\ 1})^3 = \frac{(T_{Planet\ 1})^2 \cdot (a_{Planet\ 2})^3}{(T_{Planet\ 2})^2}$$

Dass die Keplerschen Gesetze zutreffen, kann man mithilfe des Satzes über die Erhaltung des Drehimpulses zeigen. Daher wollen wir zuerst einmal diesen Satz erwähnen um ihn anschließend zu benutzen um das 2. Keplersche Gesetz zu begründen.
Der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses (die Rotationsbewegung in einem physikalischen System) L besagt, dass dieser stets konstant ist:

$$L = m \cdot v \cdot r = m \cdot \frac{ds}{dt} \cdot r$$

Man kann sich dies leicht durch folgendes Beispiel verdeutlichen: Der Drehimpuls beim Wirbeln einer Schnur mit einem Stein daran ergibt sich aus dem Produkt von Schnurlänge (r), Masse des Steins (m) und der Geschwindigkeit des Steins (v).

Das zweite Keplersche Gesetz besagt nun, dass die Flächengeschwindigkeit $\frac{dF}{dt}$ konstant bleibt (eben die überstrichenen Flächen des Leitstrahls in einer Zeit t).
Aus

$$\frac{dF}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{r}{2}$$

folgt nun, dass $\frac{dF}{dt}$ konstant sein muss, weil wir aus obiger Überlegung wissen, dass $\frac{ds}{dt} \cdot r$ konstant bleibt.

2.4 Das Gravitationsgesetz

Wir bezeichnen zwei unterschiedliche Massen mit M und m sowie den Abstand der Kerne dieser beiden Massen mit r. Des Weiteren sei K die Anziehungskraft, bzw. die *Gravitationskraft*:

$$K \sim \frac{M \cdot m}{r^2} \Rightarrow K = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \tag{2.1}$$

G heißt Gravitationskonstante.
$\left[\frac{G \cdot M}{r^2}\right]$ heißt Schwerebeschleunigung von M, sowie $\left[\frac{G \cdot m}{r^2}\right]$ Schwerebeschleunigung von m.

Beispiel 1. Die Schwerebeschleunigung der Erde ist für unsere Breitengrade bekannt ($g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$), sodass sich o.g. Formel leicht am Beispiel der Erde verdeutlichen lässt.

Wir kennen die Gravitationskontante $G \approx 6,668 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$, die Masse der Erde $M \approx 5.977 \cdot 10^{24} kg$ und den Radius $r \approx 6,3782 \cdot 10^6 m$. Dadurch erhalten wir einen genäherten Wert für die Schwerebeschleunigung der Erde (Erdbeschleunigung) g:

$$g \approx \frac{6,668 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5.977 \cdot 10^{24} kg}{(6,3782 \cdot 10^6 m)^2} \approx 9,796 \frac{m}{s^2}$$

Dieser Wert gilt für die Beschleunigung in äquatornähe. Der uns bekannte Wert gilt dagegen für unsere Breitengrade.
Beispiel 2. Als zweites Beispiel wollen wir die Kräfte von der Sonne sowie der Erde auf den Mond vergleichen und betrachen, inwiefern sich die Kräfte unserer Erde und die des für uns essentiellen Sterns - der Sonne - auf den Mond unterscheiden. Um etwas Platz zu sparen, werden wir die Werte gleich einsetzen, die Reihenfolge allerdings beibehalten, sodass Sie die Werte aus der Formel ablesen können:

$$K_{[Erde \leftrightarrow Mond]} \approx \frac{6,668 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5.9756 \cdot 10^{24} kg \cdot 7.35 \cdot 10^{22} kg}{(400\ 000 \cdot 10^3 m)^2} \approx 1,83 \cdot 10^{20} N$$

$$K_{[Sonne \leftrightarrow Mond]} \approx \frac{6,668 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 2 \cdot 10^{30} kg \cdot 7.35 \cdot 10^{22} kg}{(150\ \cdot 10^9 m)^2} \approx 4,36 \cdot 10^{20} N$$

Wir erkennen, dass der Mond stärker von der Sonne als von der Erde angezogen wird, d.h., der Mond wird von der Erde in seinem Umlauf um die Sonne etwas gestört.

2.5 Bestimmung der kosmischen Geschwindigkeiten

Die 1. kosmische Geschwindigkeit ist die minimale Kreisbahngeschwindigkeit, d.h., dass sich ein Körper mit dieser Geschwindigkeit in einer Kreisbahn um den anderen Körper bewegt.
Wenn man diese minimale Kreisbahngeschwindigkeit berechnet, muss man die Gravitationskraft mit der Radialkraft (Zentrifugalkraft) gleichsetzen. Das Gleichsetzen dieser beiden Kräfte bedeutet, dass ein Planet in einer Kreisbahn um den anderen Planeten rotiert.

$$Gravitationskraft = Radialkraft\ (Zentrifugalkraft)$$

$$G \cdot \frac{Mm}{r^2} = \frac{m \cdot r^2}{r} \Rightarrow v_{Kreis} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \quad (1.\ kosmisches\ Gesetz)$$

Wir halten folglich fest: Die Kreisbahngeschwindigkeit beträgt $\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$.

Die 2. Kosmische Geschwindigkeit ist die Entweichgeschwindigkeit, d.h. wenn ein Körper diese Geschwindigkeit erreicht, wird z.B. ein Planet aus seiner ellipsenförmigen Kreisbahn in eine parabelförmige Umlaufbahn übergehen.
Dazu sind wieder ein paar Vorgedanken nötig. So stellt sich die Frage, wie es passieren kann, dass ein Planet aus seiner Umlaufbahn gerissen wird. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die durch die Geschwindigkeit des Planeten bestimmte kinetische Energie (E_{kin}) größer ist als das Potential (E_{pot}) des anderen Planeten ihn wieder anzuziehen. Deswegen werden wir die potentielle Energie mit der kinetischen Energie vergleichen. Die potentielle Energie überwiegt in einem Planetensystem, weil das Potential vorhanden sein muss den anderen Planeten wieder anzuziehen. Wenn nun die Energien gleich sind, wird der Verlauf des Planeten nicht großartig unterschiedlich sein, aber zum Zeitpunkt der Rückkehr ist das Potential nicht mehr vorhanden, den Planeten zurück zu holen. Deswegen reißt sich der Planet aus seiner Umlaufbahn und fliegt ins Universum. Die entstandene Umlaufbahn ist eine parabelförmige Umlaufbahn.

$$E_{kin} = E_{pot}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = G \cdot \frac{Mm}{r} \Rightarrow v_{Entweichung} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (2.\ kosmisches\ Gesetz)$$

Wie man leicht erkennen kann, unterscheiden sich die beiden Gleichungen nur um den Faktor $\sqrt{2}$. Als Veranschaulichung soll ein kleines Beispiel dienen.

Beispiel 1. Die Erde bewegt sich heutzutage mit $30km/s$ auf ihrer fast kreisförmigen elliptischen Bahn. Die Entweichgeschwindigkeit der Erde beträgt folglich $42,43km/s$.

Kapitel 3

Die Sonne als „heiße Gaskugel“

3.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden wir uns mit dem Leitthema „Die Sonne ist eine heiße Gaskugel“ beschäftigen und erklären, welche Vorgänge in der Sonne vonstatten gehen. Wir wollen uns daher z.B. mit dem Temperaturverlauf, Druckverlauf, Dichteverlauf und der Energiequelle beschäftigen. Das Modell eines Sterns wird grundlegend von drei Aspekten gestützt:

- Theorie der Sternatmosphären
- Theorie des Sternaufbaus

  Die Temperatur, der Druck und die Dichte in einem Stern nehmen von innen nach außen ab.
- Langsame Verwandlung des Kerns durch Kernfusionsprozesse

Die letzten beiden Punkte werden wir hier näher erläutern, wohingegen der erste Punkt aufgrund seiner hohen Komplexität ausgelassen wird.
Eine Rolle wird auch die Frage spielen, **warum ein Stern stabil existieren kann**.

3.2 Die Masse eines Sterns

In Sternen verteilt sich die Masse in Kernnähe. Bei der Sonne befinden sich 95% der Masse in Kugel mit dem halben Sonnenradius:
Unser Ziel ist es nun eine mathematische Formulierung dieser Masseverteilung zu finden. Hierzu stellen wir folgende Überlegung an: Die Oberfläche einer Kugel berechnen wir bekanntlich mit $O = 4\pi r^2$. Das Volumen dieses Kugelausschnittes berechnen wir folglich durch $V = O \cdot \Delta r$, wobei Δr die Dicke des betrachteten Ausschnittes darstellt. Durch eine Zusatzüberlegung erhalten wir schließlich unsere gesuchte Formel zur Berechnung der Masse in einem Stern. Um die erforderliche Dichte und die Masse mit einzubringen, nehmen wir uns die Definition der Dichte

$$\rho = \frac{Masse}{Volumen} = \frac{M}{V}$$

zu hilfe. Durch Ersetzen des Volumens

$$V = O \cdot \Delta r$$

erhalten wir

$$\frac{M}{\rho} = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$$

und nach Umstellen die Differentialgleichung zur Bestimmung der Masse:

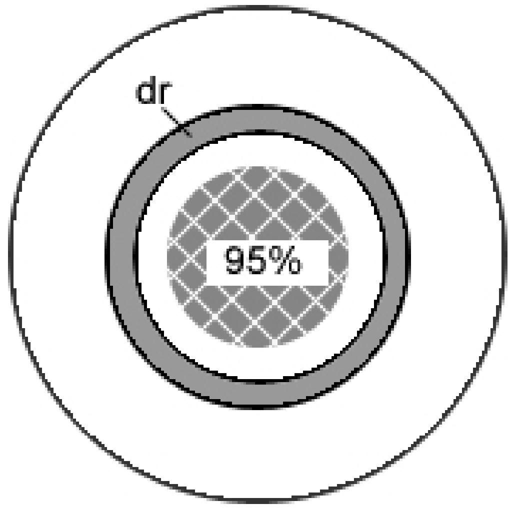

Abbildung 3.1: Masseverteilung der Sonne

$$\frac{dM(r)}{dr} = \rho 4\pi r^2$$

Nun noch einige Erläuterungen zur Masse:

- Verkleinert man den Radius eines Sterns weit genug und lässt die Masse konstant, so überschreitet er den Schwarzschildradius. Dieser Radius gibt an, ab welchem Verhältnis von Masse zu Radius ein Objekt zum Schwarzen Loch werden kann. Man kann diesen Radius berechnen durch: $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. Diese Formel soll hier allerdings keine weitere Erläuterung erfahren.
- Die Sonnenmasse beträgt $2 \cdot 10^{30} kg$ und wird mit M_Θ bezeichnet.

3.3 Das hydrostatische Gleichgewicht

Das hydrostatische Gleichgewicht ist essentiell für das Überleben eines Sternes, denn würden sich die in einem Stern wirksamen Kräfte nicht ausgleichen, würde der Stern nicht mehr seine Beständigkeit erhalten können und so entweder auseinanderdriften oder zusammenfallen. Daher wollen wir die Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht herleiten.
Auf das in Abbildung 3.2 eingezeicnete Volumenelement wirkt die Gravitationskraft K (siehe Kapitel 2.4):

$$K = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \tag{3.1}$$

des Weiteren wirkt auf diesen Abschnitt der Druck ΔP:

$$\Delta P = \frac{Kraft}{Fläche} = \frac{K}{A} \tag{3.2}$$

Durch die Dichte ρ des Volumenelementes mit

$$\rho = \frac{Masse}{Volumen} = \frac{m}{V}$$

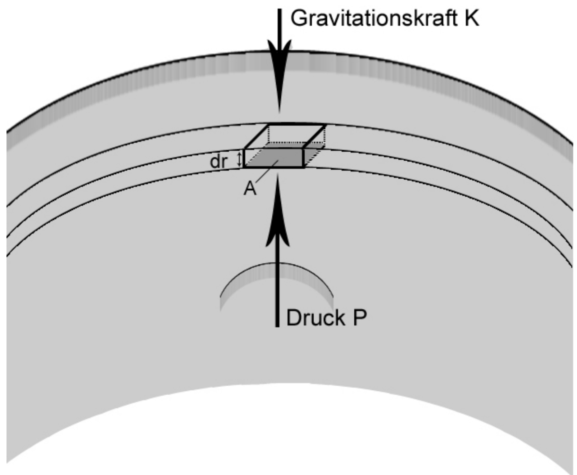

Abbildung 3.2: Ein Volumenelement in einem Stern - Kräftekompensation von K und P

und das Volumen desselbigen mit

$$V = A \cdot \Delta r$$

ergibt sich für die Dichte:

$$\rho = \frac{Masse}{Volumen} = \frac{m}{A \cdot \Delta r} \tag{3.3}$$

Durch Einsetzen von (3.2) und (3.3) in (3.1) ergibt sich dann:

$$dP \cdot A = G \frac{M \cdot \rho \cdot A \cdot dr}{r^2}$$

Umgestellt erhalten wir die Formel für das hydrostatische Gleichgewicht:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \cdot \frac{G \cdot M(r)}{r^2}$$

Das Minuszeichen ist lediglich formeller Natur, weil wir den Radius von innen nach außen verändern und der Druck im Stern nach außen hin abnimmt.

3.4 Nukleare Energieerzeugung und die Leuchtkraft eines Sterns

3.4.1 Hintergründe zur Energieerzeugung

Die Energie in der Sonne wird durch die Kernfusion von Wasserstoffatomen zu Heliumatomen erzeugt. Die summarische Vereinfachung der Reaktion ist folgende:

$$4\ {}^{1}H \rightarrow 4He + \left(E_H = 6 \cdot 10^{14} \frac{J}{kg} \right)$$

Die dabei frei werdende Energie E_H entspricht

$$E_H = mc^2$$

Durch die hohen Temperaturen im Kern der Sonne (ca. $15 \cdot 10^6 K$), dem Ort der Energieerzeugung, liegt der Wasserstoff in ionisierter Form vor und es kommt dadurch zur Protonenreaktion.

$$^1H + {}^1H \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu \tag{3.4}$$

In (3.4) verschmelzen zwei Protonen zum schweren Wasserstoff, dem Deuterium. Dadurch wird ein Positron frei; die weiteren Verschmelzungsschritte sehen wie folgt aus:

$$^2H + {}^1H \rightarrow {}^3He + \gamma \tag{3.5}$$

$$^3He + {}^3He \rightarrow {}^4He + 2\,{}^1H \tag{3.6}$$

Die bei der Kernfusion von von 1 g Wasserstoff frei werdende Energie E_H könnte einen Einpersonenhaushalt 150 Tage lang mit Energie versorgen.

3.4.2 Mathematische Hintergründe zur Energieproduktion und Leuchtkraft

Die Energieerzeugung in einem Stern bezeichnen wir als ϵ und sie ist definiert als $\epsilon = \frac{Joule}{Sekunde \cdot Gramm} = \frac{J}{s \cdot g}$. Die Leuchtkraft definieren wir uns als $L = \frac{Joule}{Sekunde}$. Zum Aufstellen der Differentialgleichung betrachten wir die Änderung dieser Leuchtkraft ΔL in einer Kugelschale der Dicke Δr. Die Masse dieser Kugelschale ergibt sich dann aus $4\pi r^2 \cdot \Delta r$ multipliziert mit der Dichte ρ. Wiederum multipliziert mit der Energieerzeugungrate ϵ erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung der Kugelschale:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \cdot \rho \cdot \epsilon$$

3.4.3 Das Ende eines Sterns

Die Kernfusion von Helium zu Wasserstoff läuft in dem Kern der Sonne ab. Hierbei sammelt sich über einen sehr langen Zeitraum das enstandene Helium im Kern. Um das im Kern enstandene Helium wird die Kernfusion in einer Schale um den Kern fortgesetzt. Durch die Gravitation verdichtet sich das Helium und es entstehen höherwertige Atome, wie Kohlenstoff und Sauerstoff. Die Kernfusion läuft stetig weiter, wodurch sich die o.g. Schale weiter in die äüßeren Teile der Atmosphäre hinein vergrößert. Diese enthält 90% Wasserstoff und 10% Helium und einige Promille schwere Atome. Dabei löst sich diese Atmosphäre von dem verdichteten Kern, welcher als weißer Zwerg zurück bleibt.
Bei unserer Sonne, welche das Schicksal auch erleiden wird, hätte der weiße Zwerg einen Durchmesser von $0,01$ Sonnenradien.
Das oben beschriebene Phänomen tritt bei Sternen auf, die eine Masse von weniger als acht Sonnenmassen besitzen. Sterne über diesem Wert werden bei dem o.g. Prozess der Verdichtung, aufgrund der Bildung von noch höher wertigen Atomen, wie Eisen und der erhöhten Gravitation des Kerns zu Neutronensternen oder schwarzen Löchern.
Bei den genannten Absprengungsprozessen werden Planeten von über 200 Sonnenradien Entfernung von dem abgesprengten Material umfasst und stark erhitzt.

3.5 Energietransport

3.5.1 Hintergründe zum Energietransport

Die pro Zeiteinheit produzierte Energie muss schließlich auch in dieser nach außen transportiert werden. Angetrieben vom Temperaturgefälle gelangt die im Zentrum der Sterne frei werdende Energie an die Oberfläche, von wo sie ins All abgestrahlt wird. Der Energietransport von innen nach außen kann sehr lange dauern. So dauert es zum Beispiel 170 000 - 1 000 000 Jahre bis die beim Wasserstoffbrennen im Innern frei gesetzte Energie bis zur von uns sichtbaren Oberfläche gelangt ist.

Prinzipiell gibt es für den Transport von Energie drei verschiedene Mechanismen: Wärmeleitung, Strahlung und Konvektion. Wärmeleitung tritt bei Sternen nur in extremen Materiezuständen auf, wie sie z.B. bei Weißen Zwergen und Neutronensternen zu finden sind. In „normalen“ Sternen dagegen sind für den Energietransport im Wesentlichen nur Strahlung und Konvektion von Bedeutung. Beim konvektiven Wärmetransport wird die Energie in Form von aufsteigender heißer Materie, die abgekühlt wieder herunter sinkt, durch die Materie hindurch diffundiert. Während des Hauptreihenstadiums hängt die Art des Energietransports in den verschiedenen Tiefen eines Sterns vor allem von dessen Masse ab. Sterne mit kleiner Masse sind vollständig konvektiv, Sterne von etwa Sonnengröße haben einen radiativen Kern und eine konvektive Hülle, und Sterne mit großer Masse haben einen konvektiven Kern und eine radiative Hülle. In folgender Abbildung sind diese Sterne dargestellt:

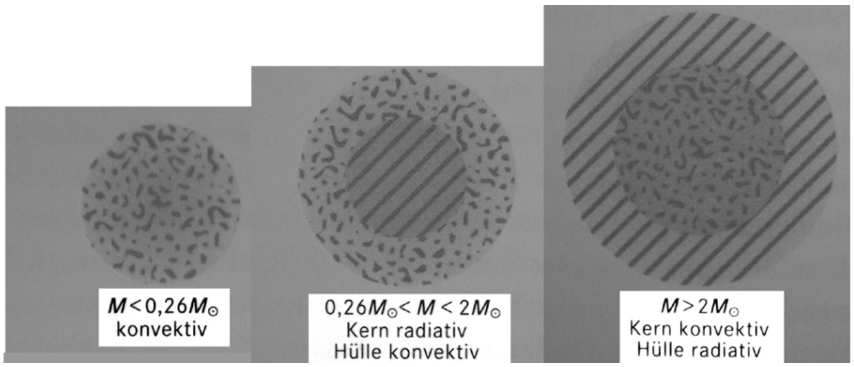

Abbildung 3.3: Sternkonfigurationen - Energietransport

3.5.2 Mathematische Betrachtung des Energietransportes durch Strahlung

In der Natur kommt es zu Konzentrationsausgleichen durch Diffusion. Diffusionsvorgänge sind so gekennzeichnet, dass der Diffusionsvorgang vom Ort der höheren Dichte zum Ort der niederen Dichte gerichtet ist. Bei Sternen nennen wir die zu betrachtende Dichte Strahlungsenergiedichte $u = a \cdot T^4$, wobei T die Temperatur bezeichnet, sowie a ein Proportionalitätsfaktor. Das Konzentrationsgefälle der Energiedichte schreiben wir als Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dT} \cdot \frac{dT}{dr} = 4aT^3 \cdot \frac{dT}{dr} \tag{3.7}$$

Den schon angesprochenen Diffusionsstrom bezeichnen wir mit j. Wir schreiben:

$$j = \frac{du}{dr} \cdot \frac{1}{3} \cdot v \cdot l \tag{3.8}$$

Hierzu sind noch einige kurze Erläuterungen vonnöten. Das Differential $\frac{du}{dr}$ heißt das Gefälle, v ist die Geschwindigkeit der diffundierenden Teilchen und l die sogenannte freie Weglänge (der Weg, den ein Teilchen zurück legt, bis es mit einem anderen Teilchen kollidiert). Des Weiteren ist es wichtig fest zu stellen, dass der Diffusionsstrom in einem Stern als

$$j = \frac{Leuchtkraft}{Oberfl\ddot{a}che} = \frac{L}{4\pi r^2}$$

geschrieben wird. Man nennt ihn den Strahlungsstrom. Da wir den Transport von Energie betrachten, setzen wir die Geschwindigkeit $v = c$ (Lichtgeschwindigkeit). Weiterhin ist die freie Weglänge als

$$l = \frac{1}{\rho \cdot \kappa}$$

definiert. Hierbei ist ρ die Dichte und κ das Vermögen der Materie, Strahlung zu absorbieren. Durch äquivalente Umformung der Gleichung (3.8) nach $\frac{du}{dr}$ erhalten wir durch Gleichsetzen mit (3.7) die Gleichung:

$$4aT^3 \cdot \frac{dT}{dr} = \frac{3L}{4\pi r^2 \cdot c \cdot \frac{1}{\rho \cdot \kappa}}$$

Nach Umstellung nach $\frac{dT}{dr}$ erhalten wir

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3\rho\kappa L(r)}{16\pi r^2 acT^3}, \tag{3.9}$$

was unserer gesuchten Differentialgleichung zur Beschreibung des Energietransportes durch Strahlung entspricht.

3.5.3 Mathematische Betrachtung des Energietransportes durch Konvektion

Der Energietransport durch Konvektion in der Sonne erfolgt vorwiegend durch Konvektion an den Stellen des Sterns, an denen der adiabatische (ohne Wärmeverlust) Temperaturgradient ($\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}$) flacher verläuft als der Gradient, der sich im Strahlungsgleichgewicht einstellt:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} < \frac{dT}{dr} \tag{3.10}$$

Maßgebend ist hierbei die Größe γ (das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen), welche sich z.B. durch Ionisation von Wasserstoff stark ändern kann.
Bei Überwiegen der Konvektion stellt sich der Temperaturgradient wie folgt ein:

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \cdot \frac{T}{P} \cdot \frac{dP}{dr} \tag{3.11}$$

Kapitel 4

Experimente und Ergänzendes

4.1 Experimentelle Bestimmung der Rotationszeit der Sonne

Wir haben experimentell mit einem Sonnenprojektor ermittelt wie lange es dauert, bis sich die Sonne einmal um die eigene Achse gedreht hat.

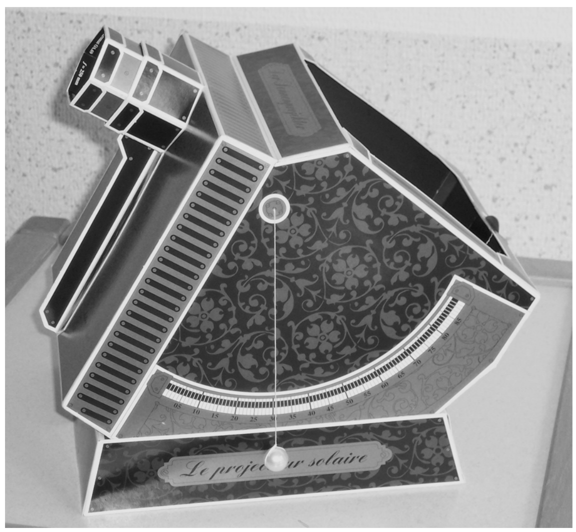

Abbildung 4.1: Der Sonnenprojektor

Um diese Rotationszeit zu berechen, benötigt man den Winkel zum Mittelpunkt der Sonne den der Sonnenfleck innerhalb einer bestimmten Zeit T zurück gelegt hat.

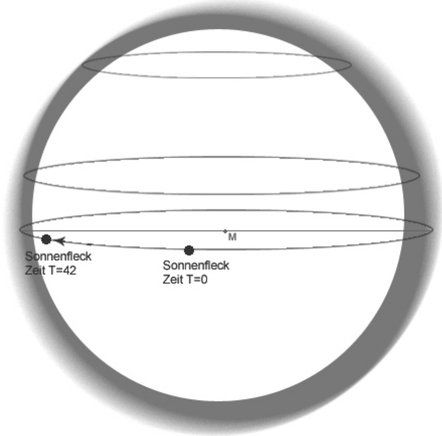

Abbildung 4.2: Sonnenflecken

Um den Winkel zu messen kippt man die Fläche, auf dem sich der Sonnenfleck befindet, geometrisch nach oben.
Nun befinden sich Anfangs- und Endpunkt am Rand des umgekippten Sonnenausschnitts. AnschlieÃŸend verbindet man die Punkte mit dem Mittelpunkt, wodurch wir einen Winkel β messen können.

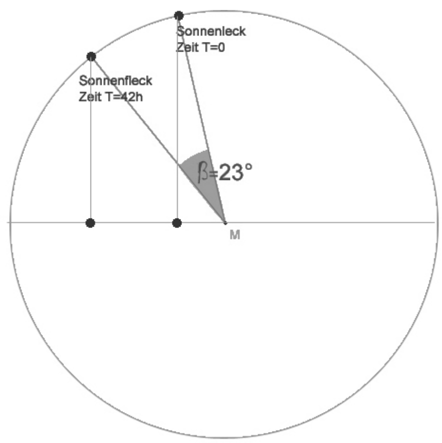

Abbildung 4.3: Umgekippte Ausschnittsfläche

Wir wissen nun, dass sich die Sonne nach einer bestimmten Zeit T um den Winkel β bewegt hat. Durch den Dreisatz können wir nun die gesuchte Rotationszeit T_R berechnen:

$$\frac{\beta}{T} = \frac{360°}{T_R} \Leftrightarrow T_R = \frac{360° \cdot T}{\beta}$$

Aus unseren experimentellen Aufzeichnungen haben wir eine Rotationszeit von $27,4$ Tagen berechnet, was dem eigentlichen Wert für diese solare Breite von ca. 28 Tagen sehr nahe kommt. Unser Experiment mit einer einfachen Pappkonstruktion war letztendlich sehr erfolgreich - die Abweichung betrug lediglich wenige Prozent.