

Numerische Simulation von Differentialgleichungen

Teilnehmer:

Paul Lofink	Heinrich-Hertz-Oberschule
Oliver Lorenz	Heinrich-Hertz-Oberschule
Bianca Mix	Georg-Forster-Oberschule
Christian Ritschel	Georg-Forster-Oberschule
Sebastian Günther	Georg-Forster-Oberschule

Gruppenleiter:

Caren Tischendorf	Technische Universität Berlin, Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
-------------------	---

Die Gruppe beschäftigte sich mit der numerischen Lösung von Differentialgleichungen, um einen zweistufigen Operationsverstärker simulieren zu können.

Dazu wurde zunächst an einem einfachen Schaltkreis ein Gleichungssystem zur Simulation erstellt, das in eine Differentialgleichung umgeformt wurde. Zur Lösung der Gleichung wurde schrittweise das explizite und das implizite Eulerverfahren hergeleitet.

Danach konnte gezeigt werden, dass die ermittelten Lösungen sinnvoll sind, wenn ihre Abweichungen von den tatsächlichen Werten eingeschränkt werden können. Anschließend wurden sowohl das explizite als auch das implizite Eulerverfahren in Matlab implementiert, um die Ergebnisse zu veranschaulichen.

Dann wurde das gleiche Verfahren für die Simulation des zweistufigen Operationsverstärker angewandt.

1 Grundlagen

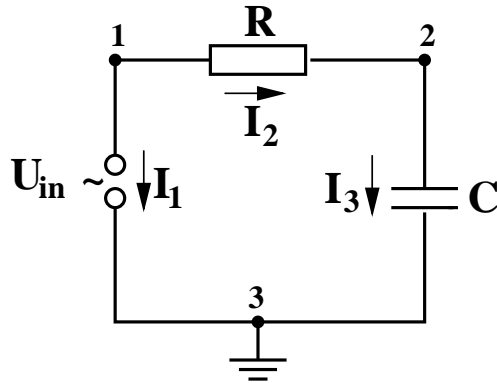


Abbildung 1: Einfache RC-Schaltung

1.1 Kirchhoff'sche Gesetze

1.1.1 Kirchhoff'sches Strom-Gesetz

Die Summe aller in einem Knoten zusammenlaufenden Ströme ist gleich Null.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

Dabei haben alle vom Knoten wegführenden Ströme positives Vorzeichen und alle zum Knoten hinfließenden Ströme negatives Vorzeichen.

1.1.2 Kirchhoff'sches Spannungsgesetz

Die Summe aller zu einer Schleife gehörenden Spannungen ist gleich Null.

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0$$

Dabei haben natürlicher Weise positive Spannungen positives Vorzeichen und negative Spannungen negatives Vorzeichen.

1.2 Abgeleitete Gleichungen

Aus den Kirchhoff'schen Gesetzen ergeben sich für das Schaltbild Abb.1 folgende Gleichungen:

$$I_1 + I_2 = 0 \quad (1)$$

$$-I_2 + I_3 = 0 \quad (2)$$

$$-U_1 + U_2 + U_3 = 0 \quad (3)$$

$$U_1 = U_{in} \quad (4)$$

$$R_1 = \frac{U_2}{I_2} \quad (5)$$

$$I_3 = C \frac{dU_3}{dt} \quad (6)$$

Aus dem Gleichungssystem ergibt sich für die Kondensatorspannung U_3 :

$$\frac{dU_3}{dt} = \frac{1}{R_1 C_1} (U_{in} - U_3)$$

Bei Gleichung (7) handelt es sich um eine Differentialgleichung. Diese ist aber nicht ohne weiteres lösbar. Die allgemeine Form einer Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda x(t) + g(t) \quad (7)$$

2 Explizites und Implizites Eulerverfahren

2.1 Explizites Eulerverfahren

Frage:

Wie kann man $x'(t) = \lambda x(t) + g(t)$ für beliebige λ und beliebige Funktionen $g(t)$ lösen ?

Idee: Numerisch

Dafür wird das zu betrachtende Zeitintervall $[t_0, t_{end}]$ in viele kleine Zeitintervalle der Länge h zerlegt.

Für $h \rightarrow 0$ gilt $x_1 \rightarrow x(t_1)$, wobei x_1 der approximative Wert und $x(t_1)$ der tatsächliche Wert ist.

Bemerkung: (7) besitzt eine eindeutige Lösung, falls $x(0) = x_0$ ist, wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige, aber feste reelle Zahl ist.

Problem: Wir suchen die eindeutige Lösung bei vorgegebenem x_0 zu den Zeit-

punkten $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{end}$!

$$\begin{aligned} x'(0) &= \lambda x(0) + g(0) \\ &= \lambda x_0 + g(0) \\ x'(t_1) &= \lambda x(t_1) + g(t_1) \\ &\approx \lambda x_1 + g(t_1) \end{aligned}$$

Wir berechnen Approximationen x_n für $x(t_n)$ mit Hilfe von

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \lambda x_{n-1} + g(t_{n-1}) \quad (8)$$

bei x_0 startend.

$$\Leftrightarrow x_n = x_{n-1} + h(\lambda x_{n-1} + g(t_{n-1}))$$

$\frac{x_n - x_{n-1}}{h}$ ist der Differenzenquotient und daher gilt: $\frac{x_n - x_{n-1}}{h} \approx x'(t_{n-1})$

Wir betrachten folgende Differentialgleichung :

$$x'(t) = \lambda x(t) + g(t) \quad (9)$$

Satz 1: Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert auf dem endlichen Intervall $[t_0, t_{end}]$ genau eine Lösung x von (9), das heißt,

$$x'(t) = \lambda x(t) + g(t) \quad \forall t \in [t_0, t_{end}]$$

mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, vorausgesetzt, dass $g(t)$ stetig ist. Somit gilt für die Lösung, $x(t)$ ist stetig differenzierbar.

Der Satz 1 wird hier nicht bewiesen.

Satz 2: Sei g auf $[t_0, t_{end}]$ stetig und die Schrittweite h hinreichend klein. Dann gilt für die eindeutige Lösung $x(t)$ von (9) mit $x(t_0) = x_0$ und die numerische Lösung von (8):

Es existiert eine Konstante $c > 0$:

$$\max_{n=1, \dots, N} |x(t_n) - x_n| \leq ch$$

wobei c unabhängig von N ist. N sei die Anzahl der Teilintervalle.

2.1.1 Beweis

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \lambda x_{n-1} + g(t_{n-1}) \quad (10)$$

$$(9) \underset{t=t_{n-1}}{\Rightarrow} x'(t_{n-1}) = \lambda x(t_{n-1}) + g(t_{n-1}) \quad (11)$$

1. Man bildet die Differenz aus der Verfahrensgleichung (10) und der Differentialgleichung im Punkt t_{n-1} (11).

Dann gilt für den globalen Fehler $e_n := x_n - x(t_n)$

$$e_n = (1 + \lambda h)e_{n-1} + hr_n$$

r_n ist der lokale Diskretisierungsfehler.

2. Durch rekursives Auflösen erhält man

$$e_n = (1 + \lambda h)^n e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \lambda h)^i hr_{n-i}$$

$$e_0 = x_0 - x(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad e_n = \sum_{i=0}^{n-1} |1 + \lambda h|^i hr_{n-i}$$

3. Dreiecksungleichung und Taylorentwicklung

Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\max_n |r_n| < ch$.

$$\begin{aligned} \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\Rightarrow} |e_n| &\leq ch^2 \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \lambda h)^i = ch^2 \begin{cases} n & \text{für } |1 + \lambda h| = 0 \\ \frac{|1 + \lambda h|^n - 1}{|1 + \lambda h| - 1} & \text{sonst} \end{cases} \\ \max_N |e_N| &\leq ch^2 \begin{cases} N & \text{für } |1 + \lambda h| = 0 \\ \frac{|1 + \lambda h|^N - 1}{|1 + \lambda h| - 1} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Wir nutzen $Nh = t_n - t_0$

$$\max_n |e_n| \leq \tilde{c}h \text{ falls } |1 + \lambda h| > 0 \text{ d.h. } h < \frac{-1}{\lambda} \text{ für } \lambda < 0$$

q. e. d.

2.1.2 Implizites Eulerverfahren

Wir betrachten den Punkt t_n

$$\begin{aligned} x'(t_n) &= \lambda x(t_n) + g(t_n) \\ &\approx \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann ein neues Verfahren

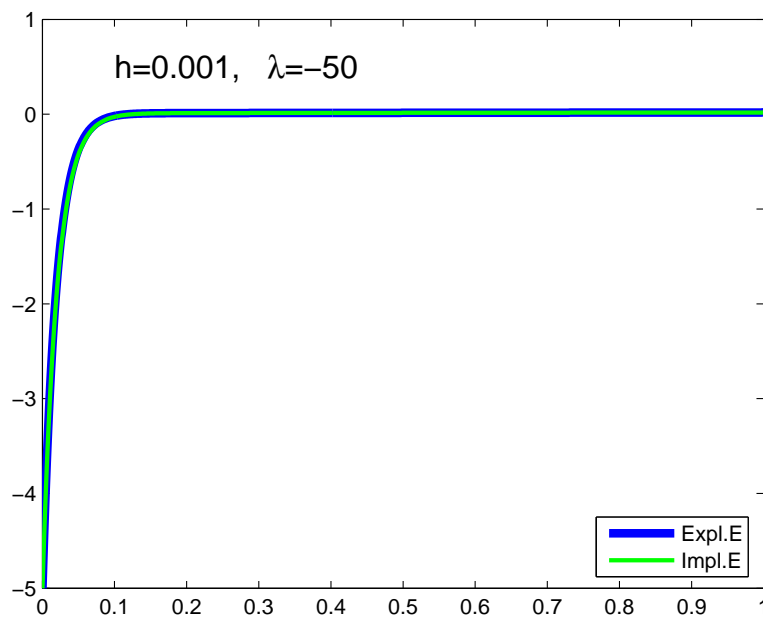
$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \lambda x_n + g(t_n)$$

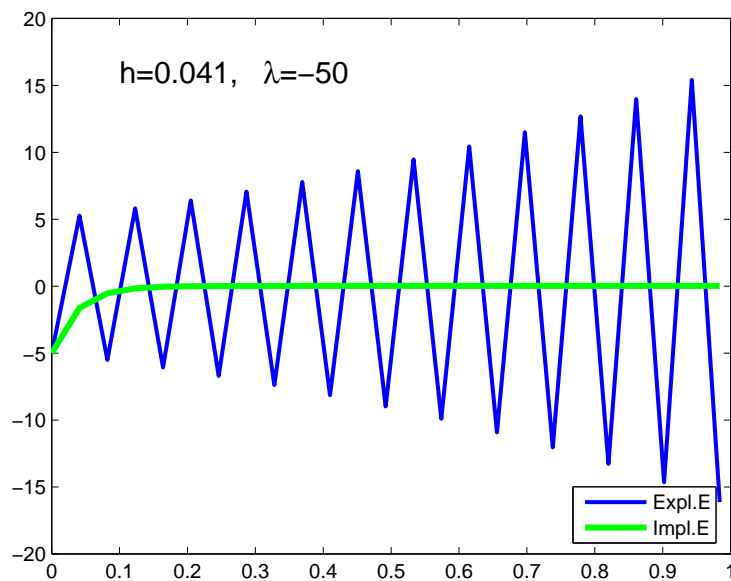
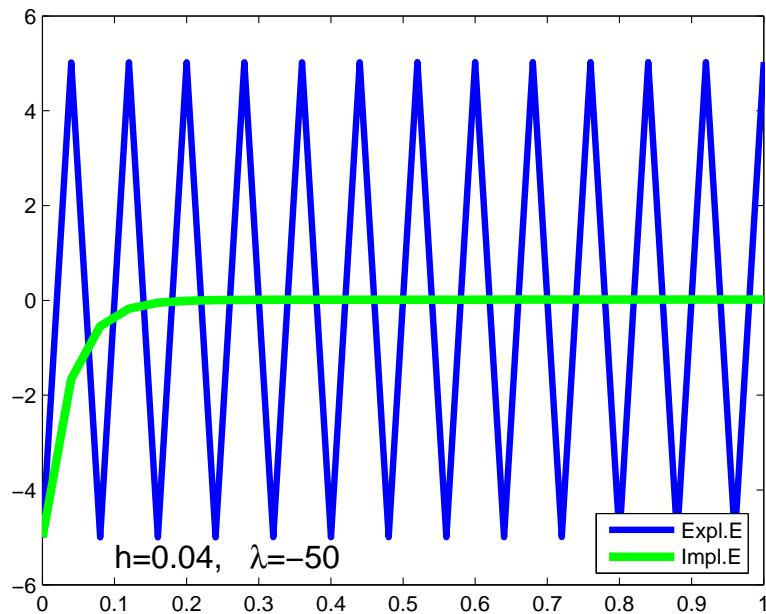
Implizites Eulerverfahren:

$$x_n = \frac{g(t_n)h + x_{n-1}}{1 - h\lambda}$$

2.2 Vorteile des Impliziten Eulers bezogen auf die Anwendung

Graph des expliziten und impliziten Eulers für vordefinierte h :

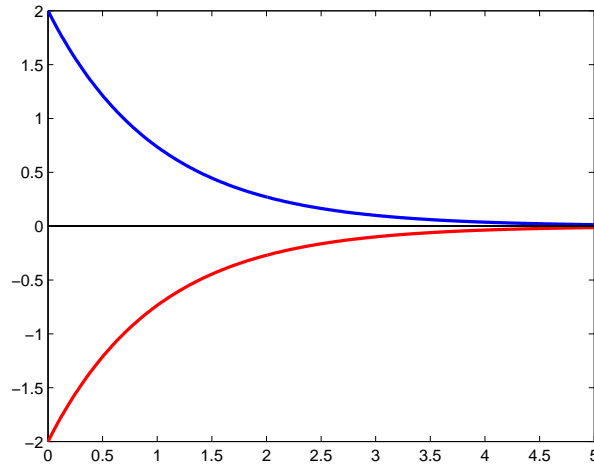




Es ist zu erkennen, dass das explizite Eulerverfahren, bei größerem h , nicht den Graph einer Exponentialfunktion liefert, der den Spannungsabfall über einem Kondensator darstellt. Es ist im zweiten Diagramm eine zwischen -5 und 5 oszillierende Funktion. Im dritten Diagramm oszilliert der Graph und divergiert außerdem. Das implizite Eulerverfahren liefert dagegen den Graph einer Exponentialfunktion. Da nur der Parameter h verändert wurde, kann man annehmen,

dass die Größe von h den Verlauf des Graphen des expliziten Eulers entscheidend beeinflusst.

$$x' = \lambda x \text{ mit } \lambda < 0$$



Für die Lösung $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ gilt: $|x(t)|$ ist monoton fallend.

Expliziter Euler:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \lambda x_{n-1} \quad \Rightarrow \quad x_n = (1 + \lambda h)x_{n-1}$$

Es gilt $|x_n| < |x_{n-1}|$ nur für $|1 + \lambda h| < 1$.

h als Schrittweite ist immer positiv, λ negativ.

$$\begin{aligned} |1 + \lambda h| < 1 &\Leftrightarrow 1 + \lambda h < 1 \quad \wedge \quad 1 + \lambda h > -1 \\ &\Leftrightarrow \lambda h < 0 \quad \wedge \quad h < -\frac{2}{\lambda}, \quad \text{d.h. nur für } h < -\frac{2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Impliziter Euler:

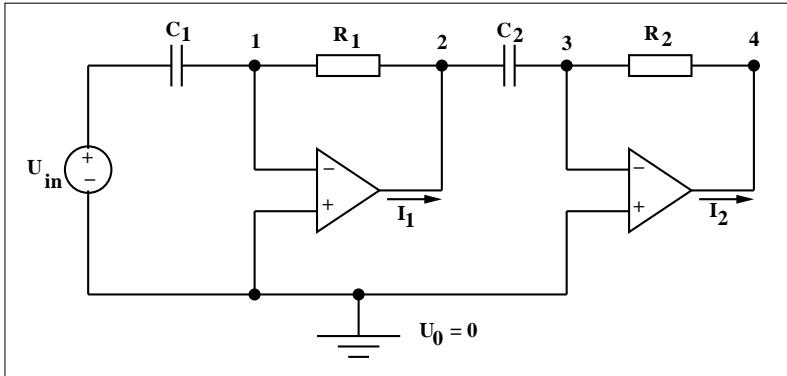
$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \lambda x_n \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{1}{1 - \lambda h} x_{n-1}$$

Es gilt $|x_n| < |x_{n-1}|$ für alle $h > 0$, denn

$$\frac{1}{1 - \lambda h} = \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 \quad \text{mit } \varepsilon := -\lambda h > 0$$

Das implizite Eulerverfahren erzeugt immer abklingende Lösungen unabhängig von der Schrittweite.

3 Zweifacher Operationsverstärker



Nach dem Kirchhoff'schen Stromgesetz gilt:

$$\begin{aligned}
 -I_{C_1} + I_{R_1} &= 0 \\
 -I_1 + I_{C_2} - I_{R_1} &= 0 \\
 -I_{C_2} + I_{R_2} &= 0 \\
 -I_{R_2} - I_{R_2} - I_2 &= 0 \\
 I_{C_1} + I_V &= 0
 \end{aligned}$$

Spannungen:

$$\begin{aligned}
 V_{R_1} &= U_1 - U_2 \\
 V_{R_2} &= U_3 - U_4 \\
 V_{C_1} &= U_5 - U_1 \\
 V_{C_2} &= U_2 - U_3
 \end{aligned}$$

Elementbezogene Gleichungen

$$\begin{aligned}
 I_{C_1} &= C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = C_1 \left(\frac{dU_5}{dt} - \frac{dU_1}{dt} \right) \\
 I_{C_2} &= C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = C_2 \left(\frac{dU_2}{dt} - \frac{dU_3}{dt} \right) \\
 I_{R_1} &= \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{U_1 - U_2}{R_1} \\
 I_{R_2} &= \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{U_3 - U_4}{R_2} \\
 U_2 &= -AU_1 \\
 U_4 &= -AU_3 \\
 U_5 &= U_{in}
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich, nach mehreren Umformungen, ein Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten U_1 und U_3 :

$$\begin{aligned} -C_1\left(\frac{dU_{in}}{dt} - \frac{dU_1}{dt}\right) + \frac{1}{R_1}(U_1(A+1)) &= 0 \\ -C_2\left(\frac{d(AU_1)}{dt} - \frac{dU_3}{dt}\right) + \frac{1}{R_2}(U_3(A+1)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dU_1}{dt} = -\frac{1+A}{R_1C_1}U_1 + \frac{dU_{in}}{dt} \\ A\frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_3}{dt} = -\frac{1+A}{R_2C_2}U_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_1' = -\frac{1+A}{R_1C_1}U_1 + U_{in}' \\ U_3' = \frac{1+A}{R_2C_2}U_3 + A\frac{1+A}{R_1C_1}U_1 - AU_{in}' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_1' \\ U_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}' = B\vec{x} + \vec{g}(t) \text{ mit } b_1 &= -\frac{1+A}{R_1C_1}, b_2 = 0, g_1(t) = U_{in}'(t) \\ b_3 &= A\frac{1+A}{R_1C_1}, b_4 = \frac{1+A}{R_2C_2}, g_2(t) = -AU_{in}'(t) \end{aligned}$$

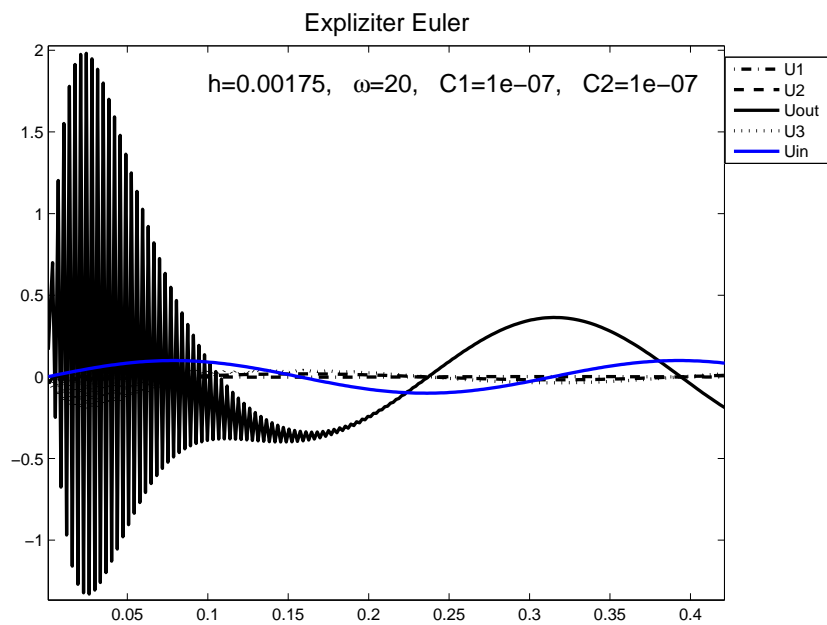
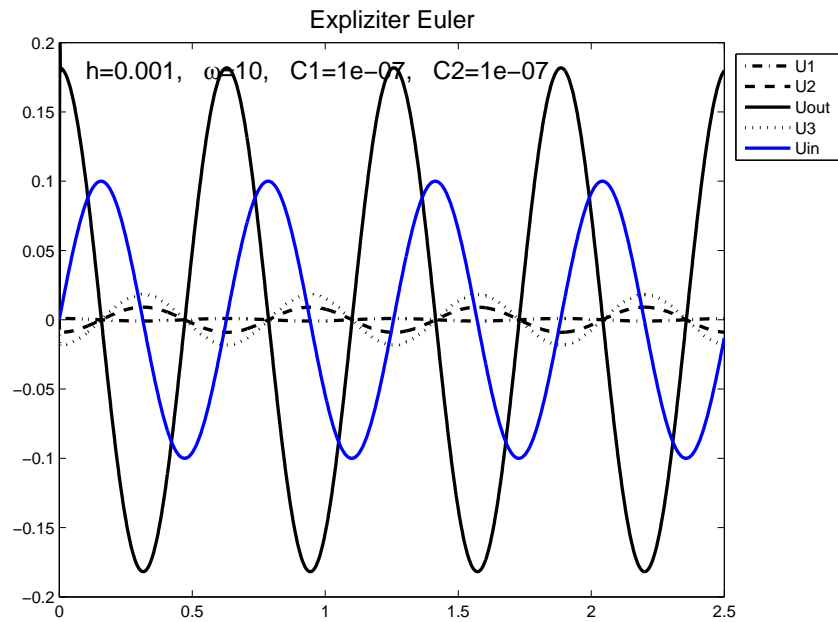
Explizites Eulerverfahren für Systeme:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1}}{h} &= B\vec{x}_{n-1} + \vec{g}(t_{n-1}) \\ \vec{x}_n &= \vec{x}_{n-1} + hB + h\vec{g}(t_{n-1}) \end{aligned}$$

Implizites Eulerverfahren für Systeme:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1}}{h} &= B\vec{x}_n + \vec{g}(t_n) \\ \vec{x}_n - hB\vec{x}_n &= \vec{x}_{n-1} + h\vec{g}(t_n) \\ LGS \rightarrow (I - hB)\vec{x}_n &= \vec{x}_{n-1} + h\vec{g}(t_n) \\ \vec{x}_n &= (I - hB)^{-1}(\vec{x}_{n-1} + h\vec{g}(t_n)) \end{aligned}$$

4 Ergebnisse für den zweifachen Operationsverstärker



Die obigen beiden Grafiken zeigen, dass der explizite Euler für kleine Schrittweiten vernünftige Lösungen, für große Schrittweiten aber unsinnige Lösungen liefert.

Das implizite Eulerverfahren hingegen liefert auch für größere Schrittweiten vernünftige Lösungen. Insbesondere sieht man in den nächsten beiden Abbildungen, dass sich die Outputspannung $U_{out} = U_4$ verdoppelt, wenn man die Frequenz ω des Eingangssignals verdoppelt.

