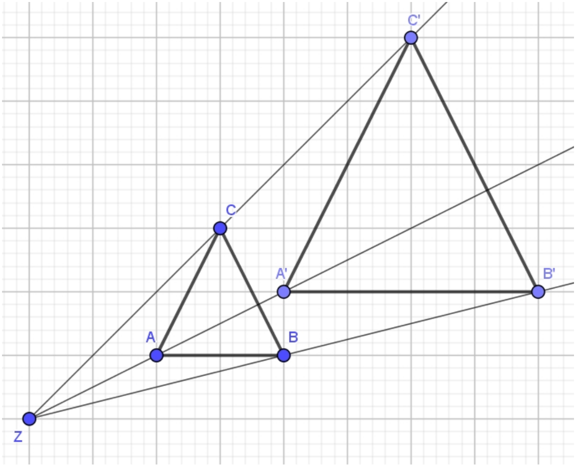
Strahlensätze und Ähnliches

Dr. Elke Warmuth

Sommersemester 2018



Was ist hier passiert?

Zentrische Streckung mit Streckungszentrum Z und Streckungsfaktor k, $k > 0$:

- Abbildung der Ebene auf sich
- Jedem Punkt $P \neq Z$ wird sein Bildpunkt P' folgendermaßen zugeordnet:
  P' liegt auf dem Strahl ZP^+ und es gilt $|ZP'| = k \cdot |ZP|$.
- Es gilt $Z' = Z$.

Aufgabe

Zeichnen Sie ein beliebiges Parallelogramm (F) bzw. Drachenviereck (M) und seine Diagonalen. Wählen Sie einen Punkt Z im Innern der Figur und strecken Sie die Figur und ihre Diagonalen mit dem Streckungszentrum Z und dem Streckungsfaktor 2 (F) bzw. 0,5 (M).

Verhalten von Punkten und Geraden bei einer zentrischen Streckung mit $k > 0, k \neq 1$:

a. Z ist der einzige Fixpunkt.

b. Z, P und P' liegen stets auf einer Geraden.

c. Die Bilder von Strecken bzw. Geraden sind Strecken bzw. Geraden.
Die Bildstrecke ist k-mal so lang wie die Urbildstrecke.
Jede Gerade wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.

d. Genau die Geraden durch Z sind Fixgeraden.

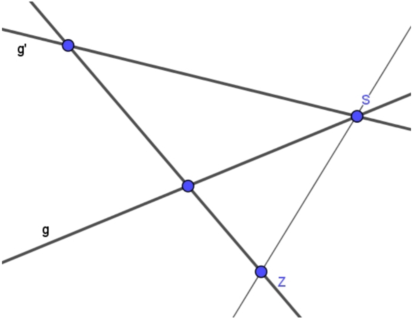
e. Das Winkelmaß ist invariant.

f. Das Teilungsverhältnis ist invariant.

Bezeichnung: $S_{Z,k}$

Jede Gerade wird durch $S_{Z,k}$ auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.

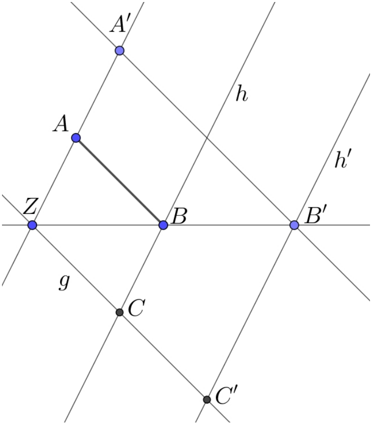
Beweis.



Angenommen, eine Gerade und ihre Bildgerade würden sich in S schneiden. Dann wäre S ein weiterer Fixpunkt – Widerspruch. □

Die Bildstrecke unter $S_{Z,k}$ ist k-mal so lang wie die Urbildstrecke.

Beweis.

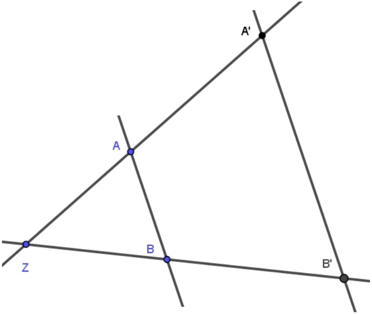


- Sei $g \parallel AB$ und $h \parallel ZA$ und C der Schnittpunkt von g und h.
- h' geht durch C' und B' und ist parallel zu h.
- Die Vierecke $ZCBA$ und $ZC'B'A'$ sind Parallelogramme.
- Aus $|AB| = |ZC|$, $|A'B'| = |ZC'|$ und $|ZC'| = k \cdot |ZC|$ folgt $|A'B'| = k \cdot |AB|$.

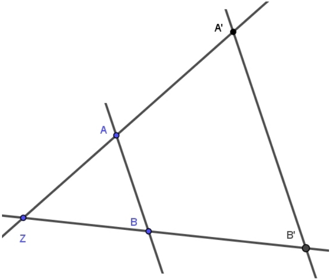
Satz

Werden zwei sich in einem Punkt Z schneidende Geraden von parallelen Geraden g und g' in A, B bzw. A', B' geschnitten, dann gilt:

- $|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'|$ *(Erster Strahlensatz)*
- $|ZA| : |ZA'| = |AB| : |A'B'|$ *(Zweiter Strahlensatz)*



Beweis.



Betrachte $S_{Z,k}$, die A in A' überführt. Dann ist g' das Bild von g und B' das Bild von B und es gelten die Streckenverhältnisse

$$|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'| = \frac{1}{k} \text{ und } |ZA| : |ZA'| = |AB| : |A'B'| = \frac{1}{k}$$

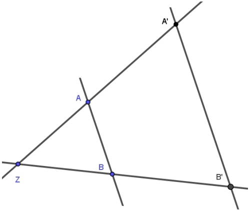
□

Folgerung

Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt auch

$$|ZA| : |ZB| = |AA'| : |BB'|$$

Beweis.



$|AA'| = |ZA'| - |ZA| = k \cdot |ZA| - |ZA| = (k-1)|ZA|$ und
$|BB'| = |ZB'| - |ZB| = k \cdot |ZB| - |ZB| = (k-1)|ZB|$.
Folglich
$|AA'| : |BB'| = (k-1)|ZA| : (k-1)|ZB| = |ZA| : |ZB|$. □

Der 1. Strahlensatz ist umkehrbar:

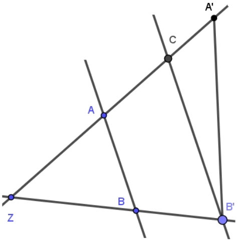
Satz

Gilt $A' \in ZA^+, B' \in ZB^+$ *und*

$$|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'|,$$

so ist $AB \parallel A'B'$.

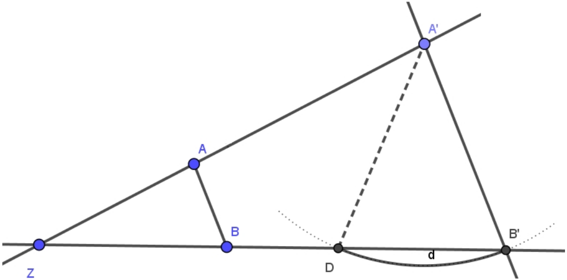
Beweis.



Angenommen, AB und $A'B'$ seien nicht parallel. Zeichne Parallele zu AB durch B'. Sie schneide ZA^+ in $C \neq A'$. Nach dem 1. Strahlensatz gilt $|ZA| : |ZC| = |ZB| : |ZB'|$. Nach Voraussetzung gilt $|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'|$. Also muss $C = A'$ sein, im Widerspruch zur Annahme.

$\square$

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar:



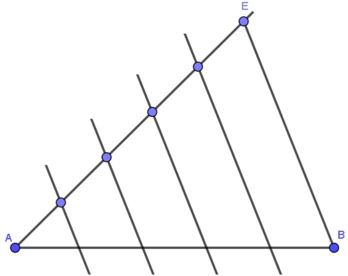
$|ZA| : |ZA'| = |AB| : |A'D|$, aber AB und $A'D$ sind nicht parallel.

Anwendung des 1. Strahlensatzes:

Teilung einer Strecke AB in n gleich lange Stücke.

Beispiel

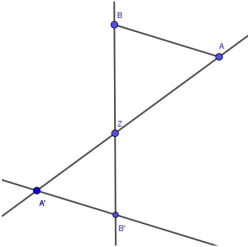
$n = 5$



Aufgabe

Kommentieren Sie die Abbildung.

Auch das ist eine Strahlensatzfigur:



Sie gehört zum Fall $k < 0$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
|ZA| : |ZA'| &= |ZB| : |ZB'| \\
|ZA| : |ZA'| &= |AB| : |A'B'| \\
|ZA| : |ZB| &= |AA'| : |BB'|
\end{aligned}
$$

Satz

In Trapez gilt:

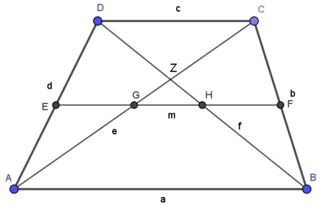
- $m = \frac{a+c}{2}, |GH| = \frac{a-c}{2}$
- *Die Mittellinie verläuft durch die Mittelpunkte der Diagonalen.*
- *Die Diagonalen schneiden einander im gleichen Verhältnis, nämlich wie $c : a$.*

Beweis.

3. Beweis mit Strahlensatz:

   $|ZA| : |ZC| = |ZB| : |ZD|$

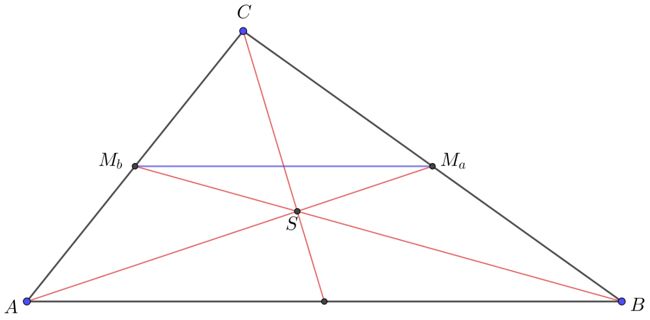
   $= a : c.$



$\square$

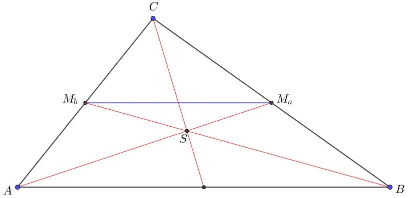
Satz

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt S. Dieser Punkt S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (von den Ecken aus gemessen).



z.B. $|AS| : |SM_a| = 2 : 1$

Beweis.



1. $AB \| M_a M_B$. (Seitenmittendreieck)
2. Betrachte die Strahlensatzfigur mit S als Zentrum, den Geraden $g(A,S)$ und $g(B,S)$ und den Parallelen aus 1.
3. Nach 2. Strahlensatz gilt $AS : SM_a = BS : SM_b = AB : M_a M_b$.
4. $AB : M_a M_b = 2 : 1$ (Seitenmittendreieck), also $AS : SM_a = BS : SM_b = 2 : 1$.
5. Analog für die dritte Seitenhalbierende.

□

Mit Hilfe zentrischer Streckungen kann man eine Figur maßstäblich verkleinern oder vergrößern.

Definition

Eine Figur G heißt zu einer Figur F ähnlich, wenn G zu einem dieser Bilder von F kongruent ist.

Wenn G zu F ähnlich ist, dann auch F zu G. Man sagt: F und G sind zueinander ähnlich.

Beispiele

- Alle Kreise sind untereinander ähnlich.
- Alle Strecken sind untereinander ähnlich.
- Alle Quadrate sind untereinander ähnlich.
- Alle gleichseitigen Dreiecke sind untereinander ähnlich.

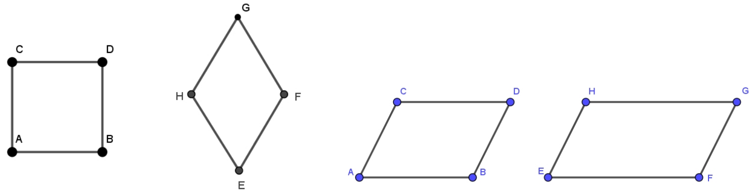
Satz

In ähnlichen n-Ecken stimmen entsprechende Winkelgrößen und das Verhältnis entsprechender Seiten überein.

Beweis.

Das folgt aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung und der Kongruenz. $\square$

Die Gleichheit der Seitenverhältnisse reicht i.A. ebensowenig für die Ähnlichkeit aus wie die Gleichheit der Winkelgrößen.



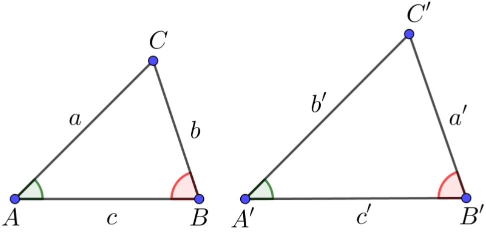
Für die Ähnlichkeit von Dreiecken reichen dagegen die Winkel aus.

Hautähnlichkeitssatz für Dreiecke:

Satz

Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Beweis.



Zwei Dreiecke mögen in zwei Winkeln übereinstimmen: Wir wählen die Streckung $S_{A,\frac{c'}{c}}$. B wird abgebildet auf einen Punkt B'', für den gilt $|AB''| = k \cdot |AB| = \frac{c'}{c} \cdot c = c'$. Bei einer zentrischen Streckung bleiben die Winkelgrößen erhalten. Nach Kongruenzssatz wsw gilt $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$. Folglich sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ ähnlich. $\square$

Symbol $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Weitere Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Satz

Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind genau dann ähnlich, wenn sie

1. *im Verhältnis entsprechender Seiten (sss)*
2. *in einem Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten (sws)*
3. *im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (Ssw)*

übereinstimmen.

Beweis.

1. Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, dann müssen sie in allen Winkeln und im Verhältnis entsprechender Seiten übereinstimmen. Das folgt aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung und der Kongruenz.
2. Beweis beispielhaft für sss: Für $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ gelte $a : a' = b : b' = c : c' = k$.
   Wir strecken $\triangle A'B'C'$ mit Streckzentrum A' und Streckfaktor k. Dann stimmt das Bild von $\triangle A'B'C'$ bei dieser Streckung in allen drei Seitenlängen mit $\triangle ABC$ überein. Es ist also kongruent (nach sss) mit $\triangle ABC$. Folglich gilt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

□

Beispiel

Zwei Rechtecke sind genau dann ähnlich, wenn die Verhältnisse einander entsprechender Seiten gleich sind.

Beispiel

DIN-Formate: Das durch mittiges Falten entstehende kleinere Rechteck soll dem größeren ähnlich sein.

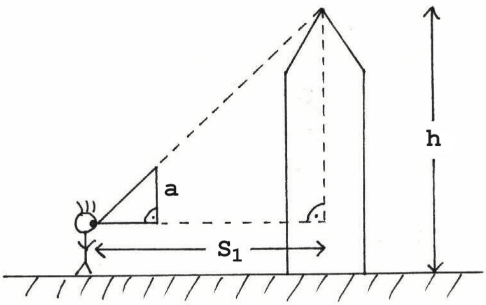
- Größeres Rechteck: Höhe h, Breite b, kleineres Rechteck: Höhe b, Breite $\frac{h}{2}$
- Ähnlichkeitsbedingung:

$$\begin{aligned} h : b &= b : \tfrac{h}{2} \\ h^2 &= 2b^2 \\ h &= \sqrt{2}b \end{aligned}$$

- DIN A4: 297 mm x 210 mm, $297 : 210 \approx 1,4143$

Beispiel

Försterdreieck:

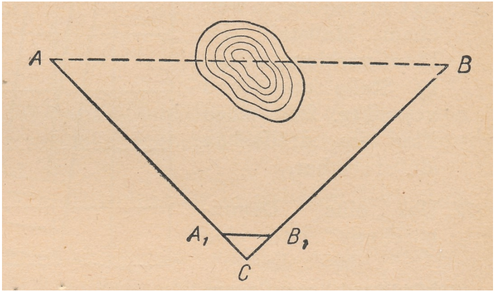


Das Peildreieck sei gleichschenklig. Die Aughöhe sei h_1. Es gilt

$$a : S_1 = a : (h - h_1).$$

Also ist $h = h_1 + S_1$.

Aufgabe



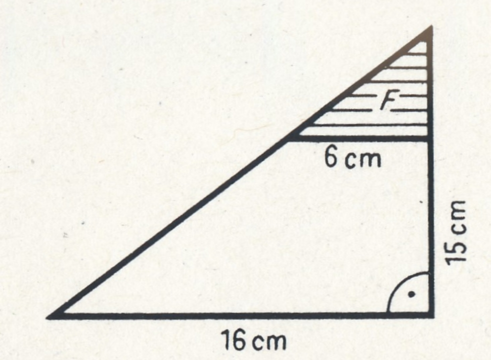
Gesucht ist die Entfernung von A nach B.

Aufgabe

Ein Dreieck (F) bzw. ein Rechteck (M) wird mit dem Faktor k vergrößert, so dass einen ähnliche Figur entsteht. Wie verändert sich dabei der Umfang und der Flächeninhalt?
Gilt die Aussage auch für beliebige n-Ecke? Warum?

Aufgabe

$F = ?$



Lösung: $16{,}875\ \mathrm{cm}^2$